

修士論文
TAMA300 データを用いた連続重力波解析

梶村 幸

2005 年 1 月

目次

第1章 序	4
第2章 連続重力波	6
2.1 パルサーからの連続波	6
2.1.1 連続波の式	6
2.1.2 周波数変化	7
2.1.3 理論的な upper limit	7
2.1.4 これまでの観測	8
2.2 連続波の干渉計出力	8
2.2.1 ドップラー効果	9
2.2.2 干渉計出力	9
2.2.3 パラメータ	10
第3章 連続重力波探索の原理	12
3.1 Matched filtering	12
3.1.1 エネルギーの集中	12
3.1.2 Matched filtering	13
3.1.3 FFTによる matched filtering	14
3.1.4 パワースペクトル密度	14
3.1.5 SNR	15
3.2 統計	15
3.2.1 白色、かつ時間領域でガウシアンな雑音	16
3.2.2 実際の雑音	17
3.3 複数のデータ	17
3.4 Coincidence 解析	19
3.4.1 Coincidence 条件	19
第4章 データ加工	20
4.1 解析に用いるデータ	20
4.1.1 重力波の観測	20
4.1.2 今回の解析で用いたデータ	21
4.1.3 SN ロスを考えるときに想定する期間	22
4.2 データ圧縮	23
4.3 Weighting	24

4.4	Weight function の作成	26
第 5 章	SN ロス	32
5.1	SNG	32
5.2	補正パラメータ (θ, C) 値の最適な集合	33
5.3	補正パラメータ f_0	35
5.3.1	補正パラメータ f_0 値の最適な集合	35
5.3.2	補正值 Δf_m の最適な集合	37
5.4	補正パラメータのまとめと結論	39
第 6 章	解析結果と解釈	41
6.1	解析の種類	41
6.2	matched filtering の結果	41
6.3	結果の解釈	46
6.4	Coincidence 解析	50
6.4.1	今回の coincidence 条件	50
6.4.2	Coincidence 解析の結果	50
6.4.3	今回の coincidence 解析が示唆すること	58
第 7 章	まとめ	59
7.1	結果	59
7.2	結論	60

第1章 序

重力波は一般相対性理論によって理論的に予測されている現象の1つである。その存在は連星中性子星の観測によって間接的に検証されているが、直接にはまだ観測されていない。重力波の直接検出は一般相対性理論の検証のみならず、従来の電磁波によるものとは異なる新たな天文学を開拓する可能性を秘めている。そのため、現在、世界各地にてLIGO (アメリカ)、VIRGO (イタリア、フランス)、GEO (ドイツ)、TAMA (日本) など、大型のレーザー干渉計が建設され観測を始めている、または、観測開始予定である。さらに、高感度な次世代型の干渉計として、日本では低温技術を用いた LCGT も計画されている。また、米国のLIGOにおいても、次世代計画である Advanced LIGO の議論が始まっている。現在稼動している検出器の1つである TAMA300 は、300m 基線長のレーザー干渉計型重力波検出器であり、東京三鷹に設置されている。TAMA300 では、1999 年から重力波の本格的観測が開始された。2001 年に DT6、2003 年に DT8、2003 年から 2004 年にかけて DT9 と呼ばれる観測が行われ、感度は観測ごとに向上している。そして、ここで得られたデータは様々な種類の重力波をターゲットとして解析されている。

重力波はその相互作用の弱さのため、源を天体現象に求めなければならない。重力波の種類は発生源により主に3つに分けられる。1つ目は、超新星爆発などから発生するバースト波であり、その波形は正確には予測しきれない。2つ目は、連星中性子星合体から放出されるチャープ波である。その波形はポストニュートニアン近似を使い正確に計算されている。3つ目は非軸対称なパルサーなどから発生する連続波である。この波形は正弦波であり、可視光、電波による観測から位置やスピンドアウンの情報などが得られている。検出器からのデータを解析する際にはこれらの波形の特徴に応じて異なった手法が用いられる。バースト波解析では、検出器出力に含まれる非定常成分を取り出すという手法が用いられる。チャープ波解析では、星の質量を少しずつ変えて多くの予想波形を準備し、データとの相関をウィナーの最適化フィルターで求める。連続波解析では、位相変調や振幅変調を補正した後、長時間積分により位相検波を行う。

本論文では、TAMA DT9 のうち 11 日間分のデータを使い、SN1987A 残骸にあると考えられているパルサー [1] から放出されている連続重力波をターゲットにして解析を行った。初めに、重力波の予想周波数が含まれる $934.908 \pm 0.5 \text{ Hz}$ 帯域をヘテロダイン検波し、リサンプリングを行った。この操作により、サンプリング周波数は 20kHz から 1Hz に減少した。次に、リサンプルされたデータを雑音レベルに応じて重み付けした。このデータに対して、位相変調や振幅変調を補正した後、FFT による積分で位相検波を行った。その結果、有意な重力波信号は見つからなかった。そこで、放出されている重力波振幅に対する上限値 (upper limit) を求めた。これまでに同じ連続波をターゲットとして行われた解析には副田によるものがある [2]。副田は、TAMA DT6 のデータを使い、解析を行った。その結果、 5.5×10^{-23} という upper limit が求められている。このとき、false alarm rate は 1%、false dismissal rate は 50% であった。その解析方法の一部は 1989 年に Garching 重力波干渉計で得られたデータに対して、Niebauer らが行った方法 [3] に乗っ取っている。しかし、この解析方法には、大きな SN ロス、雑音の仮定など、問題点がある。今回の解析では、これらの問題点を改善し、より高い信頼度で、よりよい上限値を求めることができた。

また、本論文では複数のデータを効率よく足し合わせる2つの方法を示した。そして、データを2つに分けることにより複数のデータとみなし、これらの2つの方法で解析を行った。また、分けた後の2つのデー

タに対して相関条件を求めて、実際に相関 (coincidence) 解析を行った。この解析は、干渉計の雑音により作られた重力波信号と似たイベント (偽イベント) を取り除くために行う。データにもし本当の重力波信号が含まれるならば、両方のデータに同じ波形が表れる。これは、片方のデータのみ重力波信号と似た波形をもつ信号を偽イベントとして取り除くことができることを意味する。将来、世界各地の干渉計から、色々な時期に多くのデータが得られることになる。連続波解析においてはそれらのデータを効率よく足し合わせる必要が出てくる。また、それらのデータの間で相関解析を行うことは偽イベントを取り除くために有効である。さらに、実際の重力波候補が得られた際、重力波検出を裏付けるために相関解析は欠かせない。本論文に示した解析方法は、より多くの干渉計からデータが得られた場合にもそのまま適用することができる。

第2章 連続重力波

パルサーは高速で回転している中性子星である。パルサーは非常に高密度で、強い重力場を持っている。さらにパルサーは強い磁場を持っており、この効果によりパルサーは非軸対称性を持つ可能性がある。そして、この非軸対称性が重力波を生む。パルサーの最も大きな特徴は、非常に規則正しい電磁波パルスを発していることである。これにより、重力波の正確な予想波形を得ることができる。また、長時間積分することにより信号の検出効率を上げることができる。

2.1 パルサーからの連続波

2.1.1 連続波の式

パルサーから太陽系重心に向かう方向、すなわち重力波の伝播方向を $\hat{\mathbf{k}}$ とおく。 $\hat{\mathbf{k}}$ の垂直面上に $\hat{\mathbf{k}}$ を通るように x 軸、 y 軸をとり、単位ベクトルをそれぞれ $\hat{\mathbf{x}}$ 、 $\hat{\mathbf{y}}$ とおく。なお、 $\hat{\mathbf{x}}$ に対して $\hat{\mathbf{y}}$ は 90° の角度 ($\hat{\mathbf{k}}$ に対して時計回り) をなす。パルサー回転軸方向を $\hat{\mathbf{s}}$ 、 $\hat{\mathbf{s}}$ の xy 平面への正射影ベクトルを $\hat{\mathbf{s}}'$ とおく。また、パルサー回転軸方向 $\hat{\mathbf{s}}$ と重力波の伝播方向 $\hat{\mathbf{k}}$ とのなす角度を θ 、 $\hat{\mathbf{x}}$ に対して $\hat{\mathbf{s}}'$ がなす角度 ($\hat{\mathbf{k}}$ に対して時計回り) を ψ' とおく。

このとき、回転パルサーから放出される連続重力波の $+$ モード h'_+ 、 \times モード h'_\times はそれぞれ次のようにかける。

$$h'_+ = \cos 2\psi' h_+ - \sin 2\psi' h_\times \quad (2.1)$$

$$h'_\times = \sin 2\psi' h_+ + \cos 2\psi' h_\times \quad (2.2)$$

これは、太陽系重心座標における式である。ここで、 h_+ 、 h_\times は、

$$h_+ = h_0 (1 + \cos^2 \theta) \cos \Phi(t') \quad (2.3)$$

$$h_\times = 2h_0 \cos \theta \sin \Phi(t') \quad (2.4)$$

とかけ、それぞれ $\psi' = 0$ のときの h'_+ 、 h'_\times である。 $\Phi(t')$ は重力波の位相発展で、

$$\Phi(t') = \Phi_0 + 2\pi (f_0 t' - C t'^2) \quad (2.5)$$

と表せる。 Φ_0 は位相発展の初期位相、 f_0 は $t' = 0$ での重力波周波数 (パルサー回転周波数の 2 倍)、 C はスピンドアウンパラメータ、 t' は太陽系重心での時刻である。 h_0 は無次元の振幅であり、

$$h_0 = \frac{2\pi^2 G}{c^4} \frac{I_{zz} f_0^2}{r} \epsilon \quad (2.6)$$

とかける。なお、 ϵ は軸対称からのずれを表すパラメータであり、

$$\epsilon = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \quad (2.7)$$

とかける。 r は重力波源からの距離、 I_{jk} はパルサーの慣性テンソルである。 c 、 G はそれぞれ光速、重力定数である。

スピンドウン C を考慮しないとき、パルサーからの重力波は太陽系重心において正弦波であることが分かる。ところで、 ψ' は未知パラメータであるが、後で述べるように考慮する必要はない。そこで、連続重力波の+モード、 \times モードとして式(2.1)、(2.2)の h'_+ 、 h'_\times ではなく、式(2.3)、(2.4)の h_+ 、 h_\times を使うことができる。

2.1.2 周波数変化

パルサーの回転周波数は一般的にとっても安定しているが、周波数を変化させるいくつかの効果がある。それは、スピンドウン、中性子星の運動によるドップラー効果、グリッチと呼ばれる急激な周波数変化である。スピンドウンは回転エネルギーの減少によって起こる。これは、自転周波数の連続的な減少であり、観測により予測されている。そのために、この効果はデータ解析でキャンセルすることができる。一方、中性子星の運動とグリッチについての情報はないので、この論文ではこれらの影響を無視する。

スピンドウン

スピンドウンとは、電磁波や重力波の放射によってエネルギーを失うことによってパルサーの自転周波数が減少する現象である。スピンドウン量 (C) は単位時間にパルサーの自転周波数がどれだけ減少するかという量であり、Hz/sの単位で表される。また、これは電磁波で観測することができる。今回の解析ではスピンドウンの効果を実時間 t' の2次までに限った。時間の2次の効果までを考慮したときに発生する重力波の位相発展が式(2.5)である。

2.1.3 理論的な upper limit

重力波の検出しやすさは理論的な振幅上限値 (upper limit) で評価できる。これは、パルサーのスピンドウンによるエネルギーロスが全て重力波による、また、周りの物体によってパルサーに加えられる回転エネルギーはない、という仮定に基づき計算される。このとき、その upper limit は、

$$h_{\max} = \sqrt{\frac{GI \dot{P}}{r^2 c^3 P}} \quad (2.8)$$

とかける。ここで、 P 、 I はそれぞれパルサーの回転周期、パルサーの慣性モーメントである。Middleditchによって報告されたSN1987Aのパラメータ [1] を用いると upper limit として 9×10^{-27} を得る。ただし、報告されたパラメータはスピンドウン $2 \sim 3 \times 10^{-10}$ Hz/s、自転周期は 2.14ms、パルサーまでの距離は 49kpc である。慣性モーメント I を求めるためには、パルサーの典型的な値である質量 $1.4M_\odot$ 、半径 10km、という値を使った。

2.1.4 これまでの観測

パルサー J0534+2200 (かにパルサー)

連続重力波に関しては、今まで、干渉計型ではなく共振型の装置を使った解析が行われてきた。かにパルサーの重力波周波数は 60Hz であり、この周波数に対して得られた今までで一番良い連続重力波の upper limit は $h_{\text{rms}} = 2 \times 10^{-22}$ という値である [5]。

SN1987A 残骸の中のパルサー

1987 年、大マゼラン星雲の中で超新星爆発が起こった。Middleditch らはこの SN1987A を 1992 年 2 月から 1996 年 2 月にかけてモニターし、複数の観測場所、観測機器で可視光領域において複雑な変調を受けた電磁波の放射をとらえた [1]。その周波数は 467.5Hz 付近であり、 $2 \sim 3 \times 10^{-10}$ Hz/s の割合で周波数は徐々に落ちていくと報告された。これから、周波数が 467.5Hz で自転周波数の変化であるスピンドウンパラメータが $2 \sim 3 \times 10^{-10}$ Hz/s のパルサーがあると考えられる。

このパルサーに対する解析は今までも Niebauer らのグループによって 1989 年に行われている [3]。しかし、当時、このパルサーから放出される重力波周波数は 1968.629Hz と報告されており、その周波数をターゲットとした解析が行われた。また、雑音は理想であると仮定して、閾値を設定して重力波の有無を決定した。彼らは重力波のそれぞれのモードの strain に対して upper limit を求めており、その値は 9×10^{-21} である。このとき、false alarm rate は 5%、false dismissal rate は 50% であった。

副田はこのパルサーから放出される重力波周波数を 935Hz として、TAMA DT6 のデータを使い解析を行った。また、雑音は理想であると仮定して、閾値を設定して重力波の有無を決定した。彼は重力波のそれぞれのモードの strain に対して upper limit を求めており、その値は 5.5×10^{-23} である。このとき、false alarm rate は 1%、false dismissal rate は 50% であった [2]。

パルサー J1939+2134

2002 年 8 月 23 日から 9 月 9 日にかけての 17 日間、LIGO と GEO による初観測 S1 が行われた。S1 のデータを使って、パルサー J1939+2134 から放出される連続重力波 (周波数 1284Hz) に対する解析がなされた。このパルサーは電磁波によって詳細に観測されており、放出される連続重力波のパラメータの不定性は SN1987A に比べて小さい。ここで h_0 に対して置かれた upper limit は約 3×10^{-22} であった。このとき、false dismissal rate は 5% であった [4]。

2.2 連続波の干渉計出力

地球の公転と自転によって、地球で観測される重力波はドップラー効果の影響を受ける。また、重力波の伝播方向と干渉計の腕の相対角度が時間変化するために、一定周波数で回転しているパルサーからくる重力波信号は変調を受けた後、検出される。

2.2.1 ドップラー効果

時刻 t' に太陽系重心に到着した重力波が干渉計位置に到着する時刻を t とおくと、

$$t' = t + \delta t \quad (2.9)$$

である。ここで、ドップラーシフト δt は太陽系重心と干渉計の間にある重力波到着時間差を意味しており、

$$\delta t = -\frac{\mathbf{r}_d \cdot \hat{\mathbf{k}}}{c} \quad (2.10)$$

と表せる。なお、 \mathbf{r}_d は太陽系重心に対する干渉計の位置、 c は光速である。

式 (2.9) を用いて、観測される重力波の位相発展を表す式 (2.5) は次のよう変化する。

$$\begin{aligned} \Phi_\delta(t) &= \Phi_0 + 2\pi \left\{ f_0(t + \delta t) - C(t + \delta t)^2 \right\} \\ &\simeq \Phi_0 + 2\pi \left\{ f_0(t + \delta t) - Ct^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ただし、 $f_0 \gg C\delta t$ 、 $t \gg 2\delta t$ の場合を考えた。

ドップラーシフト δt

ドップラーシフト δt は太陽系重心と干渉計の間にある重力波到着時間差を意味している。この効果は地球の自転と公転を合わせた効果である。

地球の公転が等速円運動だとする仮定をおくと、

$$\delta t = a_1 \cos(\Omega_E t + \phi_1) + a_2 \cos(\Omega_O t + \phi_2) \quad (2.12)$$

とかける。ただし、 Ω_E 、 Ω_O はそれぞれ、地球の自转角周波数、公转角周波数である。振幅 a_1 、 a_2 と位相 ϕ_1 、 ϕ_2 は重力波源と干渉計の位置に依存する定数である。実際には、このモデルを使うと SN ロスがかなり大きくなるために、使うことができないことが分かった。観測時間を 8 日間とすると、このモデルによる SN ロスは約 90% である。その原因は等速円運動という仮定にある。

そこで、 δt の値として NASA にある 1 分おきのデータ [6] を線形補間して使うことにした。それにより、楕円公転運動、速度変化、惑星などによる摂動の影響も考慮に入れることができる。

2.2.2 干渉計出力

干渉計の出力は次のように重力波の + モードと \times モードの線形結合でかける。

$$h = S_+ h_+ + S_\times h_\times \quad (2.13)$$

ここで、 S_+ S_\times はそれぞれ重力波の偏光モードに対する干渉計の感度を意味しており、

$$\begin{aligned} S_+ &= \frac{1}{4} \left[3 \cos^2 \alpha \sin^2 \theta' \cos 2\psi \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin 2\alpha \sin \theta' \left(\cos \theta' \cos 2\psi \cos \eta - \sin 2\psi \sin \eta \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 + \sin^2 \alpha) \left\{ \left(1 + \cos^2 \theta' \right) \cos 2\psi \cos 2\eta - 2 \cos \theta' \sin 2\psi \sin 2\eta \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} S_\times &= \frac{1}{4} \left[4 \cos \alpha \sin \theta' \left(\sin 2\psi \cos \eta + \cos \theta' \cos 2\psi \sin \eta \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin 2\alpha \left\{ 2 \cos \theta' \sin 2\psi \cos 2\eta + \left(1 + \cos^2 \theta' \right) \cos 2\psi \sin 2\eta \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

表 2.1: パルサーに関するパラメータ

項目	記号	値
パルサーの赤緯	α	$-69^{\circ}16'$
パルサーの赤経	β	$05^{\text{h}}35.5^{\text{m}}$
パルサー回転軸方向と重力波の伝播方向とのなす角度	θ	$0 \sim \pi$ rad
$\hat{\mathbf{x}}$ に対して $\hat{\mathbf{s}}'$ がなす角度 ($\hat{\mathbf{k}}$ に対して時計回り)	ψ'	$0 \sim 2\pi$ rad
重力波周波数	f_0	$934.858 \sim 934.958$ Hz
重力波スピンドアウン	C	$2 \sim 3 \times 10^{-10}$ Hz/s

である。これは、干渉計とパルサーの位置関係に依存する。ここで、 α 、 β はそれぞれパルサーの赤緯、赤経を示す。また、干渉計の余緯度、経度はそれぞれ θ' 、 λ であり、 ψ は干渉計の一方の腕が北方向となす角度である。このとき、地球の自転角周波数 Ω_E 、時間 t 、 S_+ と S_{\times} の初期位相 η_0 を用いて $\eta(t) = \eta_0 + \lambda - \beta + \Omega_E t$ である。

式 (2.13) は次のように変形でき、

$$h = S_+ h_0 (1 + \cos^2 \theta) \cos \Phi_{\delta}(t) + S_{\times} 2h_0 \cos \theta \sin \Phi_{\delta}(t) \quad (2.16)$$

$$= F(t, \theta) \sin(\Phi_{\delta}(t) + \phi(t, \theta)) \quad (2.17)$$

とかける。ここで、

$$F(t, \theta) = \sqrt{S_+^2 h_0^2 (1 + \cos^2 \theta)^2 + S_{\times}^2 4h_0^2 \cos^2 \theta} \quad (2.18)$$

$$\phi(t, \theta) = \tan^{-1} \left\{ \frac{S_+ (1 + \cos^2 \theta)}{2S_{\times} \cos \theta} \right\} \quad (2.19)$$

である。これは、単色光に振幅変調 $F(t, \theta)$ 、位相変調 $2\pi (f_0 \delta t - Ct^2) + \phi(t, \theta)$ がかったことを意味する。

また、干渉計出力に寄与する実際の重力波の + モードと \times モードの振幅 2 乗合計に対して h_r を次のように定めて合計 strain と呼ぶことにする。式 (2.3)、(2.4) より、

$$h_r = \sqrt{h_+^2 + h_{\times}^2} = h_0 \sqrt{(1 + \cos^2 \theta)^2 + 4 \cos^2 \theta} \quad (2.20)$$

とかける。

2.2.3 パラメータ

表 2.1 にパルサーに関するパラメータを、表 2.2 に干渉計に関するパラメータを示す [7]。表の中の未知パラメータのうち、パルサー回転軸方向と重力波の伝播方向とのなす角度 θ は範囲が $0 \sim \pi$ から $0 \sim \frac{\pi}{2}$ に狭まり、 ψ' は $0 \sim 2\pi$ の範囲から考慮する必要はなくなる。これは、パルサーの回転周波数約 465Hz に比べて、重力波の伝播方向と干渉計の腕の相対角度の時間変化が非常に小さいことによる。また、位相発展の初期位

表 2.2: 干渉計に関するパラメータ

項目	記号	値
干渉計の余緯度	θ'	54.3277°
干渉計の径度	λ	139.4211°
干渉計の一方の腕が北方向となす角度	ψ	90°
S_+ 、 S_x の初期位相	η_0	259.9027° ({Run140A}) 24.9561° ({Run140B})

表 2.3: 残った未知パラメータ

項目	記号	値
パルサー回転軸方向と重力波の伝播方向とのなす角度	θ	$0 \sim \frac{\pi}{2}$ rad
重力波周波数	f_0	$934.858 \sim 934.958$ Hz
重力波スピンドウン	C	$2 \sim 3 \times 10^{-10}$ Hz/s

相 Φ_0 を考慮する必要はなくなる。したがって、残った未知パラメータはパルサー回転軸方向と重力波の伝播方向とのなす角度 θ 、重力波周波数 f_0 、重力波スピンドウン C の 3 つである。これを表 2.3 に示す。

第3章 連続重力波探索の原理

ノイズに埋もれた信号を検出する最適な方法は、データと予想波形との相関を計算する matched filtering という方法である。様々なパラメータをもつ予想波形との相関を調べた結果得られる SNR (Signal-to-Noise Ratio) が統計的に有意であるものを、重力波信号として取り出すのである。例として、予想波形のパラメータが周波数である場合を考える。もしデータが十分大きい重力波信号を含むなら、その信号はパワースペクトルの中でピークとして現れる。一方、重力波信号が含まれない場合にはパワースペクトルの中に有意なピークは現れない。その場合は、信号の強さに upper limit を置くことになる。このためには、周波数領域での雑音の統計的知識、すなわち、パワースペクトルに対する確率分布を知る必要がある。

将来、世界各地の干渉計から、色々な時期に多くのデータが得られることになる。連続波解析においてはそれらのデータを効率よく足し合わせる必要が出てくる。そこで、本章では複数のデータを効率よく足し合わせる2つの方法を示した。また、それらのデータの間で相関解析を行うことは偽イベントを取り除くために有効である。さらに、実際の重力波候補が得られた際、重力波検出を裏付けるために相関解析は欠かせない。本章に示した解析方法は、より多くの干渉計からデータが得られた場合にもそのまま適用することができる。

3.1 Matched filtering

ノイズに埋もれた信号を検出する最適な方法は matched filtering という方法であり、データと予想波形との相関を計算するものである。探索信号が単色波のとき、matched filtering は Fourier 変換に等しい。 SNR は積分時間に比例して良くなるので、長時間積分は重力波の検出に有効である。しかし、積分時間を長くすると、計算時間も増加する。よって、計算時間を減らすアルゴリズムは連続重力波解析に欠かせない。

3.1.1 エネルギーの集中

重力波の干渉計出力は、式 (2.17) のように単色波に振幅変調 $F(t, \theta)$ 、位相変調 $2\pi(f_0\delta t - Ct^2) + \phi(t, \theta)$ が加かった形をしている。つまり、周波数領域において単色波のエネルギーは多くのサイドバンドに分裂する。このため、単一周波数に対する連続波探索が行われたとき、 SNR は減少する。そこで、単一周波数にエネルギーを集中させる必要がある。

式 (2.17) を変形すると次のようになる。

$$h = F(t, \theta) \frac{e^{i(\Phi_\delta(t) + \phi(t, \theta))} - e^{-i(\Phi_\delta(t) + \phi(t, \theta))}}{2i} \quad (3.1)$$

式 (2.11) を考慮して、式 (3.1) に $e^{-i2\pi f_0 t}$ をかけると

$$he^{-i2\pi f_0 t} = \frac{F(t, \theta) e^{i(\Phi_0 + 2\pi f_0 \delta t - 2\pi Ct^2 + \phi(t, \theta))}}{2i}$$

$$- \frac{F(t, \theta) e^{-i(\Phi_0 + 2\pi 2f_0 t + 2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))}}{2i} \quad (3.2)$$

となる。次に、 $e^{-i(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))}$ をかけると

$$h e^{-i(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))} = \frac{F(t, \theta) e^{i\Phi_0}}{2i} - \frac{F(t, \theta) e^{-i(\Phi_0 + 2\pi 2f_0 t + 2\pi 2f_0 \delta t - 2\pi 2C t^2 + 2\phi(t, \theta))}}{2i} \quad (3.3)$$

となり、式 (3.3) 右辺第 1 項の位相変調は 0 である。さらに、式 (3.3) に $F(t, \theta)$ をかけると、

$$h F(t, \theta) e^{-i(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))} = \frac{F(t, \theta)^2 e^{i\Phi_0}}{2i} - \frac{F(t, \theta)^2 e^{-i(\Phi_0 + 2\pi 2f_0 t + 2\pi 2f_0 \delta t - 2\pi 2C t^2 + 2\phi(t, \theta))}}{2i} \quad (3.4)$$

となる。式 (3.4) 右辺第 1 項を時間積分して絶対値の 2 乗を取った値は、

$$\left| \int \frac{F(t, \theta)^2 e^{i\Phi_0}}{2i} dt \right|^2 = \frac{(\int F(t, \theta)^2 dt)^2}{4} \quad (3.5)$$

となる。これは、干渉計の出力 h (式 (2.17)) のエネルギー $\frac{\int F(t, \theta)^2 dt}{2}$ を $\frac{\int F(t, \theta)^2 dt}{2}$ 倍したものに等しい。

一方、白色雑音 n にも同じ操作、(3.2)~(3.5)、をすると、雑音のエネルギーも $\frac{\int F(t, \theta)^2 dt}{2}$ 倍になる。よって、 h のエネルギー、 n のエネルギーが共に $\frac{\int F(t, \theta)^2 dt}{2}$ 倍になる。したがって、 SNR (第 3.1.5 節) の値は操作 (3.2)~(3.5) によって変わることはない。これは、この操作で単一周波数 DC に h と同じ大きさのエネルギーが集中したことに相当する。つまり、単一周波数に対する探索において最適な状態である。(3.2)~(3.5) で行った操作が *matched filtering* であり、データと予想波形との相関を計算することに相当している。

また、式 (3.5) から分かるように、位相発展の初期位相 Φ_0 は任意であり未知パラメータから外すことができる。

3.1.2 Matched filtering

干渉計の出力 $o(t)$ は、雑音 $n(t)$ 、重力波信号 $h(t)$ を用いて、

$$o(t) = h(t) + n(t) \quad (3.6)$$

とかける。干渉計の出力 $o(t)$ に *weight function*、 $w(t)$ 、をかけたデータ $o(t)w(t)$ に対して操作 (3.2)~(3.5) を行い、それを $|c(f_0)|^2$ とおくと、

$$|c(f_0)|^2 = \left| \int_0^T o(t)w(t)q(t)dt \right|^2 \quad (3.7)$$

と表せる。ただし、

$$q(t) = F(t, \theta) e^{-i(2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))} e^{-i2\pi f_0 t} \quad (3.8)$$

であり、 T は観測時間、 $w(t)$ の時間平均は1である。また、式(3.4)右辺第2項は周波数約 $2f_0$ の高周波成分なので積分により消える。ここで、干渉計の出力が重力波信号だけのとき、すなわち $o(t) = h(t)$ のときの $|c(f_0)|^2$ を $|c_h|^2$ とおくと、第4.3節、第4.4節で説明するように、式(3.7)は、

$$\begin{aligned} |c_h|^2 &= \left| \int_0^T h(t)w(t)q(t)dt \right|^2 \\ &= \left| \int_0^T h(t)q(t)dt \right|^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる。式(3.7)は、**matched filtering**と呼ばれており、干渉計の出力 $o(t)$ に**weight function**、 $w(t)$ 、をかけたデータ $o(t)w(t)$ と予想波形との相関の2乗を計算する。この相関をとることと式(3.9)から、実際の重力波の干渉計出力と同じ予想波形を使えば $|c^2(f_0)|$ は最大になる。

一方、干渉計の出力が雑音だけのとき、すなわち $o(t) = n(t)$ のときの $|c(f_0)|^2$ を $|c_n(f_0)|^2$ とおくと、式(3.7)は、

$$|c_n(f_0)|^2 = \left| \int_0^T n(t)w(t)q(t)dt \right|^2 \quad (3.10)$$

とかける。そして、第4.3節、第4.4節で説明するように、

$$\sum_{f_0} |c_n(f_0)|^2 \leq \sum_{f_0} \left| \int_0^T n(t)q(t)dt \right|^2 \quad (3.11)$$

となる。

3.1.3 FFTによる**matched filtering**

ここで、

$$o'(t) = o(t)w(t)F(t, \theta)e^{-i(2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))} \quad (3.12)$$

とおくと、式(3.7)は

$$|c(f_0)|^2 = \left| \int_0^T o'(t)e^{-i2\pi f_0 t} dt \right|^2 \quad (3.13)$$

となり、単純に $o'(t)$ のFourier変換で書ける。すなわち、得られたデータ $o'(t)$ に対して上で求めた補正項をかけて $o'(t)$ にしてやれば、この補正されたデータ $o'(t)$ にFFTを使えることになる。FFTを1回行うことで、周波数領域に $|c(f_0)|^2$ を得る。この $|c(f_0)|^2$ は、周波数 f_0 を変化させて**matched filtering**を行って得られる多くの結果に等しい。

3.1.4 パワースペクトル密度

式(3.12)の $o'(t)$ のパワースペクトル密度 $G(f_0)$ は、

$$G(f_0) \simeq \frac{|c(f_0)|^2}{T \int_0^T F(t, \theta)^2 w(t) dt} \quad (3.14)$$

とかける。分母の $T \int_0^T F(t, \theta)^2 w(t) dt$ は定数である。したがって、**SNR**(第3.1.5節)について論じる場合 $|c(f_0)|^2$ と $G(f_0)$ のどちらを用いても同じである。この論文では、主に $|c(f_0)|^2$ を使って説明している。

3.1.5 SNR

式 (3.7) を計算すると、周波数領域において $|c_n(f_0)|^2$ の中に $|c_h|^2$ がピークとなって表れる。よって、分母に $|c_n(f_0)|^2$ の偏差、分子に $|c_h|^2$ 、を取った式を SNR とおく。すると、

$$SNR = \frac{|c_h|^2}{\sigma\{|c_n(f_0)|^2\}} \quad (3.15)$$

$$= \frac{\left|\int_0^T h(t)w(t)q(t)dt\right|^2}{\sigma\left\{\left|\int_0^T n(t)w(t)q(t)dt\right|^2\right\}} \quad (3.16)$$

とかける。なお、 $\sigma\{x\}$ は x の偏差である。

実際の干渉計の出力 $o(t)$ では、ノイズ $n(t)$ の中に重力波 $h(t)$ が埋もれているので、

$$n(t) \simeq o(t) \quad (3.17)$$

とすると、式 (3.16) は、

$$SNR \simeq \frac{|c_h|^2}{\sigma\{|c(f_0)|^2\}} \quad (3.18)$$

$$= \frac{\left|\int_0^T h(t)w(t)q(t)dt\right|^2}{\sigma\left\{\left|\int_0^T o(t)w(t)q(t)dt\right|^2\right\}} \quad (3.19)$$

とかくことができる。

全ての未知パラメータの範囲内における SNR の最大値を統計量 SNR_{\max} と呼ぶことにする。

一方、式 (3.18) の分母は $|c_h|^2 \propto T^2$ 。式 (3.12) の $o'(t)$ が白色雑音であると仮定すると、式 (3.18) の分子は $\sigma\{|c(f_0)|^2\} \propto T$ 。したがって、 $SNR \propto T$ となる。

3.2 統計

解析では、周波数領域において統計的に有意なピークを探索する。もし、データが十分大きい重力波信号を含み、予想波形がその信号と一致すれば、その信号はパワースペクトルの中でピークとして現れる。代わりに、その値が純粋な雑音によるものならば、信号の強さに upper limit を置くことができる。このためには、当然、周波数領域での雑音の統計的知識、すなわち、パワースペクトルに対する確率分布を知る必要がある。第 3.2.1 節では、白色、かつ時間領域でガウシアンな雑音のパワースペクトルに対する確率分布について示す。そして、パワースペクトルを足し合わせることで SNR が \sqrt{T} で増加することを示す。一方、実際の雑音はより一般的な分布から得られる。そこで、第 3.2.2 節では実際の干渉計データを使った雑音の確率分布に従って upper limit を求める方法を示す。

3.2.1 白色、かつ時間領域でガウシアンな雑音

パワースペクトルに対する確率分布

ここでは、式 (3.12) の $o'(t)$ が白色かつ時間領域でガウシアンな雑音 $n'(t)$ であると仮定して、そのときのパワースペクトルに対する確率分布を求める。この雑音の利点は、パワースペクトルに対する確率分布の単純な式を得ることができる点である。このとき、雑音過程 $n'(t)$ の確率分布は次のように表せる。

$$p(n') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(n'-n_0)^2/2\sigma^2} \quad (3.20)$$

ここで、 n_0 と σ^2 はそれぞれ確率分布の平均と分散である。白色かつ時間領域でガウシアンな雑音 $n'(t)$ を仮定すると、周波数領域での雑音のパワー P は次のような指数分布になる。

$$p(P) = \frac{1}{P_0} e^{-P/P_0} \quad (0 \leq P < \infty) \quad (3.21)$$

なお、 $P_0 = 2\sigma^2$ はパワーの平均である。

パワースペクトルの足し合わせ

この節では、複数のデータに対して別々にパワースペクトルを求めた後に、それぞれのスペクトル上で予想される連続波信号の周波数成分からのパワーを足し合わせる場合を考える。そして、そのときのパワースペクトルに対する確率分布を求める。また、この足し合わせにより SNR は向上する。

雑音パワーが P_0 で信号が含まれないとき n 個のパワースペクトルの合計の確率分布は自由度 $2n$ の χ^2 分布になり、次のようにかける。

$$p_n(P) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{P^{n-1}}{P_0^n} e^{-P/P_0} \quad (3.22)$$

$n = 1$ のときは式 (3.21) に対応する。式 (3.22) の確率分布の平均と分散は、

$$\langle P \rangle = nP_0 \quad (3.23)$$

$$\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2 = nP_0^2 \quad (3.24)$$

である。よって、雑音パワーの平均はスペクトルの数 n に比例して増える。一方、分布の幅は \sqrt{n} に比例して増える。重力波信号パワーはスペクトルの数 n に比例して増えるので、SNR は \sqrt{n} に比例して増える。これは、複数のデータの合計観測時間を T とすると、SNR は \sqrt{T} に比例して増えることを意味する。

信号が含まれるとき

パワー $P_0 = 1$ の雑音と信号 P_s が含まれるとき n 個のパワースペクトルの合計の確率分布 $p_n(P; P_s)$ は次のようになる。

$$p_n(P; P_s) = \left(\frac{P}{P_s}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-(P+P_s)} I_{n-1}\left(2\sqrt{PP_s}\right) \quad (3.25)$$

なお、 I_n は n 次の変形 Bessel 関数である。

3.2.2 実際の雑音

第 3.2.1 節で説明したように、雑音が白色かつ時間領域でガウシアンであると仮定すると、データに重力波信号が含まれるとき、同じ探索を独立に行って得られた SNR_{\max} の集合で、 SNR_{\max} は χ^2 分布からずれた分布に従うランダム変数となる。しかし、実際の雑音はより一般的な分布から得られる。そこでの雑音は、白色、かつ時間領域でガウシアンではない。そこで、第 3.2.2 節では実際の干渉計データを使った雑音の確率分布に従って upper limit を求める方法を示す。

Upper limit

実際のデータから得た SNR_{\max} の値を SNR_{\max}^* とおく。信号の検出は、雑音だけの分布からは起こらないような大きな値 SNR_{\max}^* によって示される。代わりに、その値が純粋な雑音によるものならば、信号の強さに upper limit を置くことができる。

「式 (2.20) の合計 strain の大きさに confidence level、 C 、で upper limit $h_r(C)$ を置いた」ということが意味することについて説明する。例えば、confidence level 90% で upper limit h_r ということは、合計 strain が h_r 以上の重力波は存在したとしても 10% の確率ということである。その upper limit を求めるために、大きさ h_r の合計 strain をもつ本物の重力波の干渉計出力信号がデータの中あったらどういふ応答、すなわちどういふ確率分布であるかを知る必要がある。

確率分布 $p(SNR_{\max}|h_r)$ を決めるために、合計 strain の大きさ h_r は一定値 h_r^{inject} 、周波数以外のパラメータは全て同じで、周波数を少しずらした重力波模擬信号を多数つくる。全ての模擬信号は異なった周波数をもつが、ターゲット重力波信号の予想周波数 934.908Hz 付近の bin にその周波数はある。そして、干渉計出力にこの模擬信号をそれぞれ加えて、同じ波形 (それぞれの模擬信号とパラメータを全て一致させた波形) で matched filtering を行う。それぞれの模擬信号による matched filtering の結果から独立な SNR_{\max} の値を多数得る (simulation)。そして、この値のヒストグラムを作る。もし、周波数領域で干渉計出力の周波数 bin の近く同士の成分を独立かつ干渉計特有の同じ性格をもつ雑音、と認識できるなら、規格化したヒストグラムが確率密度関数 $p(SNR_{\max}|h_r^{\text{inject}})$ を表す。そのとき、confidence level は、

$$C(h_r^{\text{inject}}) = \int_{SNR_{\max}^*}^{\infty} p(SNR_{\max}|h_r^{\text{inject}}) d(SNR_{\max}) \quad (3.26)$$

である。ここで、 $h_r(C)$ は $C(h_r)$ の逆関数である。実際には、式 (3.26) の積分は simulation から直接計算できる。値 SNR_{\max}^* 以上になる SNR_{\max} の数を SNR_{\max} の全個数で割る。このようにして得られた値は、確率密度関数 $p(SNR_{\max}|h_r^{\text{inject}})$ の仮定に依存しない。また、このときの false dismissal rate は $1 - C$ である。

3.3 複数のデータ

将来、世界各地の干渉計から、色々な時期に多くのデータが得られることになる。連続波解析においてはそれらのデータを効率よく足し合わせる必要が出てくる。

そこで、複数のデータに対して、位相差を考慮して周波数領域で足し合わせることににより $|c(f_0)|^2$ を得られることを説明する。

観測時刻 t ($0 \sim T$) の干渉計出力 $o_1(t)$ 、観測時刻 t ($T_0 \sim T_0 + T$) の干渉計出力 $o_2(t)$ 、の 2 つのデータが

ある場合を考える。まず、 $o_1(t)$ と $o_2(t)$ を時系列でつなげたデータ、

$$o_{12}(t) = \begin{cases} o_1(t) & (t: 0 \sim T) \\ 0 & (t: T \sim T_0) \\ o_2(t) & (t: T_0 \sim T_0 + T) \end{cases} \quad (3.27)$$

に対して、式 (3.13) の $|c(f_0)|^2$ を求める。ここで、式 (3.12) と同様に、

$$o'_{12}(t) = o_{12}(t)w(t)F(t, \theta)e^{-i(2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))} \quad (3.28)$$

とおくと、

$$|c(f_0)|^2 = \left| \int_0^{T_0+T} o'_{12}(t)e^{-i2\pi f_0 t} dt \right|^2 \quad (3.29)$$

となり、 $|c(f_0)|^2$ を求めることができる。さらに、式 (3.27)、(3.28) を使って式 (3.29) を変形すると、

$$\begin{aligned} |c(f_0)|^2 &= \left| \int_0^T o_1(t)w(t)F(t, \theta)e^{-i(2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))} e^{-i2\pi f_0 t} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{T_0}^{T_0+T} o_2(t)w(t)F(t, \theta)e^{-i(2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))} e^{-i2\pi f_0 t} dt \right|^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

となる。ここで、式 (3.12) と同様に、

$$o'_1(t) = o_1(t)w(t)F(t, \theta)e^{-i(2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))} \quad (3.31)$$

$$o'_2(t) = o_2(t+T_0)w(t+T_0)F(t+T_0, \theta)e^{-i\{2\pi f_0 \delta t - 2\pi C(t+T_0)^2 + \phi(t+T_0, \theta)\}} \quad (3.32)$$

とおくと、式 (3.30) は次のようにかける。

$$|c(f_0)|^2 = \left| \int_0^T o'_1(t)e^{-i2\pi f_0 t} dt + \int_0^T o'_2(t)e^{-i2\pi f_0(t+T_0)} dt \right|^2 \quad (3.33)$$

$$= \left| \int_0^T o'_1(t)e^{-i2\pi f_0 t} dt + e^{-i2\pi f_0 T_0} \int_0^T o'_2(t)e^{-i2\pi f_0 t} dt \right|^2 \quad (3.34)$$

さらに、 $o'_1(t)$ 、 $o'_2(t)$ の Fourier 変換をそれぞれ、

$$\tilde{o}'_1(f_0) = \int_0^T o'_1(t)e^{-i2\pi f_0 t} dt \quad (3.35)$$

$$\tilde{o}'_2(f_0) = \int_0^T o'_2(t)e^{-i2\pi f_0 t} dt \quad (3.36)$$

とおくと、式 (3.34) は

$$|c(f_0)|^2 = \left| \tilde{o}'_1(f_0) + z_2(f_0)\tilde{o}'_2(f_0) \right|^2 \quad (3.37)$$

とかき直せる。ただし、

$$z_2(f_0) = e^{-i2\pi f_0 T_0} \quad (3.38)$$

である。式 (3.37) は、2つのデータ $o_1(t)$ 、 $o_2(t)$ に対して、別々に $\tilde{o}'_1(f_0)$ 、 $\tilde{o}'_2(f_0)$ を求めた後、周波数領域で $z_2(f_0)$ を考慮して足し合わせるにより $|c(f_0)|^2$ を得られることを意味する。また、 $o_1(t)$ と $o_2(t)$ はそれぞれ別の地点にある干渉計のデータであっても、同様に位相差を考慮して周波数領域で足し合わせることができる。さらに、3つ以上のデータに対しても同様の議論が成り立つ。

3.4 Coincidence 解析

雑音が定常かつガウシアンな場合、matched filtering は最適な検出方法である。しかし、干渉計で起こる実際の雑音は非定常であり、またガウシアンでない。そのため、重力波信号と似たイベント (偽イベント) が作られる。そのような偽イベントを取り除くために 2 つ以上の独立なデータの間で coincidence 解析を行うことは有効である。さらに、実際の重力波候補が得られた際、重力波検出を裏づけるために coincidence 解析は欠かせない。

3.4.1 Coincidence 条件

もし本当の重力波信号が干渉計出力に含まれるならば、2 つのデータに同じ波形が表れる。しかし、2 つのデータは異なる雑音レベルをもつので、周波数領域 $|c(f_0)|^2$ における重力波信号の表れ方は異なる。そこで、実際のデータに模擬信号を加えることにより coincidence 条件を決める。

coincidence 条件を決めるために次のことをする。式 (2.20) の合計 strain が h_r で表される模擬信号を実際のデータに加える。そのとき、模擬信号と一致したパラメータで、2 つのデータに対してそれぞれ $|c(f_0)|^2$ を得られる。それを、 c_A^2 、 c_B^2 とおく。 h_r を同じ大きさでもつ模擬信号を実際のデータに多数加えることで、多数の (c_A^2, c_B^2) を得られる (第 3.2.2 節)。この (c_A^2, c_B^2) が従う確率分布を $p(c_A^2, c_B^2)$ とおく。ここで、閾値 X_T を定める。そして、 p_h は

$$\int \int_{p(c_A^2, c_B^2)=0}^{p(c_A^2, c_B^2)=p_h} p(c_A^2, c_B^2) d(c_A^2) d(c_B^2) = X_T \quad (3.39)$$

を満たす値とする。これは、確率 $p(c_A^2, c_B^2)$ の小さいほうからの合計が、割合 X_T に達するところの確率が p_h である、ということの意味する。このとき、 $p(c_A^2, c_B^2) \geq p_h$ を満たす領域 (c_A^2, c_B^2) が 2 つのデータにおける $|c(f_0)|^2$ の重力波候補組み合わせとする。この領域を $(c_A^2, c_B^2)_h$ と名付ける。以上の操作を h_r の大きさを変化させて行くと、領域 $(c_A^2, c_B^2)_h$ も変化する。このとき、coincidence 条件は、

(棄却) h_r の大きさを変化させたとき、1 度も領域 $(c_A^2, c_B^2)_h$ に含まれない (c_A^2, c_B^2)

(採用) h_r の大きさを変化させたとき、少なくとも 1 度でも領域 $(c_A^2, c_B^2)_h$ に含まれる (c_A^2, c_B^2)

となる。

第4章 データ加工

干渉計によって得られる実際のデータは理想的ではない。長時間の観測では雑音レベルが一定でない。また、サンプリング周波数の高い元データを今回の解析にそのまま使うと計算時間がかかるために適さない。したがって、解析前にデータを加工しなければならない。本章では、まず今回の解析に用いたデータと SN ロスを考えるときに想定する期間について説明する。その後、解析前に行うデータ加工について説明する。

4.1 解析に用いるデータ

4.1.1 重力波の観測

TAMA300

近年のレーザー技術を始めとするさまざまな技術革新を受けて、長基線レーザー干渉計による直接検出計画が提案され、日本、欧州を中心にその研究計画が進められている。現在主流となっている Fabry-Perot-Michelson(FPM) レーザー干渉計では、光源からのレーザー光をビームスプリッター (BS) で直交する 2 方向に分割し、その両端をなす 2 本の Fabry-Perot 共振器に入射する。共振器から戻る光の位相は、FP 鏡間の固有距離に依存する。固有距離は重力波の影響を受けて変動するので、共振器から戻る光を再び BS 上で結合し、その干渉縞から重力波の信号を取り出すことができる。これがレーザー干渉計型検出器の重力波検出の原理である。

TAMA300 は日本の中規模重力波検出器計画であり、1995 年より国立天文台三鷹キャンパスにおいて 300m 基線長のレーザー干渉計の建設が進められた。干渉計の設置は予定通りに終了し、1999 年からは世界に先駆けて重力波の本格的観測を始めた。そして、900Hz 付近は最も感度がよい周波数帯域となっている。現在は重力波データ取得のための観測 Run と感度向上のための装置改良を繰り返している。TAMA300 の目的は、まず、将来の km クラス大型レーザー干渉計に必要な技術を確認することである。次に、これを実証型検出器として運転し、実際に重力波検出を狙うことである。

Data taking

干渉計型重力波検出器 TAMA300 で 2001 年 8 月から 9 月にかけて観測 DT6 が行われた。2003 年 2 月から 3 月にかけて観測 DT8 が行われた。2003 年 11 月から 2004 年 1 月にかけて観測 DT9 が行われた。DT8 は Run123~129 の観測からなっており、DT9 は Run138~142 の観測からなる。各 Run は連続的な時系列データとして記録されている。観測データは連続的に記録されているが、そのデータが全て解析に使えるわけではない。すなわち、干渉計が安定な時間帯のデータは解析に使えるが、干渉計が安定でない時間帯のデータは使えない。干渉計が安定な状態をロックしている、安定でない状態をロックが落ちているという。観測中に突発的な外乱があったときなどはロックが落ちる原因となる。

干渉計の出力は 20kHz でサンプルされており、それが磁気テープにファイルとして記録される。また、干

表 4.1: R140A と R140B の期間

データ名	期間	全時間	開始時刻の時間差
R140A	2003 年 12 月 24 日 11 時 ~2003 年 12 月 29 日 19 時	5.5 日	0 sec
R140B	2003 年 12 月 29 日 19 時 ~2004 年 1 月 3 日 21 時	5.5 日	460830 sec

表 4.2: 4 種類の解析

解析名	用いるデータ	足し合わせる方法	Coincidence 解析
{R140A+R140B}	R140A、R140B	(i)	なし
{R140A+R140B}'	R140A、R140B	(ii)	なし
{R140A+R140B}' _c	R140A、R140B	(i)	あり
{R140A+R140B}' _c	R140A、R140B	(ii)	あり

渉計の出力だけではなく、干渉計の状態や、時間に関する情報なども記録される。つまり、観測データは多チャンネルの時系列データである。観測データのファイルは **Frame Format** という形式で記録されている。これは、データを **Frame** という単位で管理するフォーマットで、重力波干渉計の観測データを記録するフォーマットの国際規格として考えられたものである。今回の観測データでは、データ点 2^{16} (約 3.2 秒) が 1 つの **Frame** に記録され、**Frame20** 個 (約 1 分) が 1 つのファイルに記録されている。

4.1.2 今回の解析で用いたデータ

今回の解析で用いたデータは DT9 内の Run140 の前半部分 (R140A と呼ぶ) と後半部分 (R140B と呼ぶ) の 2 つのデータである。それぞれのデータの期間を表 4.1 に示す。複数のデータがあるとき、足し合わせる方法は次の 2 種類がある。

- (i) 第 3.3 節、第 3.1.5 節で説明したように、複数のデータに対して、位相差を考慮して周波数領域で足し合わせることにより $|c(f_0)|^2$ を得る方法。このとき、複数のデータの合計観測時間を T とすると SNR は T に比例して増加する。
- (ii) 第 3.2.1 節で説明したように、複数のデータに対して別々に $|c(f_0)|^2$ を求めた後に、それぞれのスペクトル上で予想される連続波信号の周波数成分からの $|c(f_0)|^2$ を足し合わせる方法。このとき、複数のデータの合計観測時間を T とすると、 SNR は \sqrt{T} に比例して増加する。

第 5 章での結果から要請されるように。開始時刻の時間差が小さいデータ同士を足し合わせるときには、方法 (i) を使うべきである。一方、開始時刻の時間差が大きいデータ同士を足し合わせるときには、方法 (ii) を使うべきである。

そこで、R140A、R140B の 2 つのデータを 2 種類の方法 (i)、(ii) で足し合わせて解析した。方法 (i) を使って足し合わせた後に解析する場合を便宜上、{R140A+R140B} と名付ける。これは、DT9 内のデータ同士、

表 4.3: R128 と R140 の期間

データ名	期間	全時間	開始時刻の時間差
R128	2003年3月5日10時 ~2003年3月16日23時	11日	0 sec
R140	2003年12月24日11時 ~2004年1月3日21時	11日	25403643 sec

表 4.4: 想定する 6 種類の解析

想定する解析の名	想定するデータ	足し合わせる方法
{R140A}'	R140A	なし
{R140B}'	R140B	なし
{R140}'	R140	なし
{R128}'	R128	なし
{R128+R140}	R128, R140	(i)
{R128+R140}'	R128, R140	(ii)

TAMA と LIGO の同じ時期のデータ同士、などのように時間差が小さい複数のデータを用いる場合の解析を、実際のデータに対して行うという意味がある。方法 (ii) を使って足し合わせた後に解析する場合を便宜上、{R140A+R140B}' と名付ける。これは、DT8 と DT9 のデータ同士、TAMA と LIGO の離れた時期のデータ同士、などのように時間差が大きい複数のデータを用いる場合の解析を、実際のデータに対して行うという意味がある。

また、{R140A+R140B}、{R140A+R140B}' それぞれに対して Coincidence 解析も行った。それぞれ便宜上、{R140A+R140B}_c、{R140A+R140B}'_c と名付ける。結局、全部で 4 種類の解析を行った。4 種類の解析についてまとめたものを表 4.2 に示す。

4.1.3 SN ロスを考えるときに想定する期間

第 5 章で SN ロスについて考えるときに、データ自体を扱うことはしない。しかし、データ期間を想定する必要がある。そこで、第 4.1.2 節で付けたもの以外に便宜上必要な名を付けることにする。Run128(DT8) と Run140(DT9) の 2 つのデータを想定して、それぞれ、R128、R140 と名付ける。データの期間を表 4.3 に示す。

第 4.1.2 節と同様に R128、R140 の 2 つのデータを 2 種類の方法 (i)、(ii) で足し合わせて解析することを想定する。それぞれ、{R128+R140}、{R128+R140}' と名付ける。また、R140A、R140B、R128、R140 のデータをそのまま解析する場合も想定して、名をつけた。以上の 6 種類の解析についてまとめたものを表 4.4 に示す。

4.2 データ圧縮

干渉計の出力は 20kHz でサンプルされている。一方、ターゲットの周波数範囲は約 935Hz にある 0.1Hz 帯域幅である。ゆえに、デジタル周波数変換により、ターゲットの観測帯域幅にある情報を失わないままデータ量を減らすことができる。そのようなデータ圧縮は解析にかかる計算時間を劇的に減少させるので、必要不可欠である。

今回の解析では、そのデータ圧縮を次のような複素周波数変換とリサンプルより実現した。この方法は CHT(Complex Heterodyne Technique) と呼ばれている。

(i) 元データに $e^{-i\omega_m t}$ (ω_m : 変換角周波数) をかけてデータ周波数を変換する。

(ii) cut-off 角周波数 ω_c のデジタル low-pass filter に通すことにより、興味ある周波数帯域を取り出す。

(iii) データを 1Hz でリサンプルする。

(i)、(ii) は興味ある角周波数領域 $\omega_m - \omega_c \sim \omega_m + \omega_c$ を band-pass して、DC 付近に周波数変換したことに相当する。(i)、(ii) のあとのデータに対して Nyquist 周波数を ω_c ($2\pi\text{rad} \times 1\text{Hz}$ より十分小さい) と同じ位に取ることができる。よって (iii) では、1Hz でリサンプルすることができる。こうして、データ量は圧縮率 $(20\text{kHz}/1\text{Hz}) \times 2 = 10^4$ で減少する。ここで、リサンプルされたデータは実数成分と複素数成分をもち、帯域幅は 1Hz である。

CHT の利点

(i) において、今回の変換周波数を $f_m = 934.908\text{Hz}$ とした。すると、式 (3.7) は

$$|c(f_0)|^2 = \left| \int_0^T o(t) e^{-i2\pi f_m t} w(t) F(t, \theta) e^{-i(2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))} e^{-i2\pi(f_0 - f_m)t} dt \right|^2 \quad (4.1)$$

とかける。よって、 $o(t) e^{-i2\pi f_m t}$ の後に続く部分 $w(t) F(t, \theta) e^{-i(2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))} e^{-i2\pi(f_0 - f_m)t}$ をかける操作は、(iii) において 1Hz でリサンプルしたデータに対して行う。これは、リサンプル周波数 1Hz に比べて $w(t) F(t, \theta) e^{-i(2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))} e^{-i2\pi(f_0 - f_m)t}$ の位相変調がゆっくりなために可能である。圧縮したデータに対して $w(t) F(t, \theta) e^{-i(2\pi f_0 \delta t - 2\pi C t^2 + \phi(t, \theta))} e^{-i2\pi(f_0 - f_m)t}$ をかけることを可能にすることは、CHT の最大の利点である。

Low-pass filter

今回使った low-pass filter は cut-off 周波数 $f_c = 0.1\text{Hz}$ の 2次 Butterworth IIR digital filter であり、伝達関数 $H(f)$ は次のようにかける。

$$H^2(f) = \frac{1}{1 + (\frac{f}{f_c})^4} \quad (4.2)$$

この low-pass filter は 1Hz でリサンプルする時に起こるエイリアシングの影響を避けるためには不可欠である。ただ、信号の振幅がこのフィルタの影響で減少することを防ぐため、周波数領域において $|c(f_0)|^2$ にフィルタの伝達関数の逆数をかけてフィルタによる減少分を元に戻した。

Calibration 伝達関数

観測された重力波信号の振幅を知るためには、コンピュータで記録された ADC 電圧をひずみ振幅 strain, h 、に校正する必要がある。重力波信号の strain と ADC 電圧の関係は次のようになる [8]。

$$\tilde{h}(f) = \frac{\tilde{x}(f)}{300} \quad (4.3)$$

$$\tilde{x}(f) = \frac{1 + G(f)}{G(f)} \frac{H_p(f)}{H_w(f) \cdot H_A(f)} \tilde{V}_{\text{ADC}}(f) \quad (4.4)$$

なお、 $G(f)$ は L₋ feedback control の open-loop 伝達関数であり、

$$G(f) = H_p(f) \cdot H_c(f) \cdot H_e(f) \cdot H_o(f) \quad (4.5)$$

と表せる。ここで、 $\tilde{h}(f)$ は h の Fourier 変換、 $\tilde{V}_{\text{ADC}}(f)$ は ADC 電圧の Fourier 変換、 $\tilde{x}(f)$ は鏡位置の Fourier 変換、 $H_w(f)$ は whitening filter の伝達関数、 $H_A(f)$ は anti-aliasing filter の伝達関数、 $H_p(f)$ は coil-magnet アクチュエータドライバの出力電圧から鏡位置への伝達関数、 $H_c(f)$ は cavity pole の伝達関数、 $H_e(f)$ は feedback control 用電子回路の伝達関数、 $H_o(f)$ は optical gain の伝達関数である。

4.3 Weighting

重力波がない場合にも、干渉計の出力は理想的なガウス雑音ではない。その原因は、データの空白部分が存在する、雑音レベルが一定でない、というところにある。より高い SNR を得るために、この影響は weight function によって修正される。データ空白部分を引き起こす原因は次の 3 つである。

- (i) 干渉計出力に含まれる大きなスパイク。(干渉計出力が外乱によって跳ね上がっている)
- (ii) 干渉計のロックが外れた状態
- (iii) データの取得が行われていない部分

これらのデータ空白部分の値を 0 とした。一方、干渉計のデータ取得システムが動いているときでも、環境の変化などのために出力の雑音レベルはゆっくり変化する。そのとき、雑音レベルの低い部分が SNR に大きく効くように、データを重み付けするべきである、ということが容易に示される (Weighting factor の説明を参照)。その重み付けは、Fourier 変換前のデータに weighting factor をかけることである。これらのデータ空白部分 (0) と weighting factor を時系列でつなげたものを 'weight function' と呼ぶ。データにこの weight function、 $w(t)$ 、をかけることにより SNR を最大にする。

スパイク

観測中の急激な外乱によってデータの値が跳ね上がることもある。これをスパイクと呼ぶ。これは SNR を悪化させる。今回の解析では、平均パワーの 6 倍よりも大きなデータをスパイクとみなし、その部分とその前後それぞれ 2 秒のデータを取り除いて値を 0 とした。

干渉計のロックが外れた状態

干渉計のロックが外れている時間帯のデータを取り除いて値を 0 とした。

データの取得が行われていない部分

データを記録するテープを交換するために、Run と Run の間のデータは取られていない。この間のデータの値を 0 とした。また、Run と次の Run をつなぐとき、次の Run のリサンプル開始点と初めの Run のリサンプル開始点との時間差はリサンプリング時間間隔 1s の整数倍となるようにした。

Weighting factor

長時間の観測では雑音レベルの変動を無視できない。式 (3.19) で weight function, $w(t) = 1$ とすると、雑音レベルが大きい時間帯のデータは分母を大きくする。その結果、式 (3.19) の値、すなわち SNR は小さくなる。そこで、一定時間ごとに評価した雑音レベルが低い部分のデータを重視するような weighting factor にすることが必要である。この weighting factor が雑音レベルの逆数のとき、 SNR は最大となる。今回の解析では、データ振幅の 2 乗を 10 分間平均したものを雑音レベルとして、これから weighting factor を求めた。次に、 SNR を最適化する weighting factor は雑音レベルの逆数であることを示す。

証明

次のような簡略化したモデルを考える。全観測時間は N である。また、観測時間内で単位時間ごとに雑音レベルが変化する。このため、全観測時間は N 個の区間に分けることができる。そして、各区間の雑音の分散は σ_i^2 ($i = 1, 2, \dots, N$) であるとする。そして、区間 i を weighting factor、 k_i 、で重み付けしたとする。ただし、weight function の時間平均は 1 であるという条件 (第 4.4 節) がつく。

SNR とは式 (3.16) のようにかける。weight function の時間平均を 1 にしておけば、weight function と単色光をかけ合わせたものの $|c(f_0)|^2$ は掛け合わせる前の $|c(f_0)|^2$ と同じになることは第 4.4 節で述べる。すなわち、 SNR 式 (3.16) の分子 $|c_h|^2$ は変化しない。したがって、 SNR の変化は分母 $\sigma \{|c_n(f_0)|^2\}$ だけによる。よって、雑音 n に対する weight function の効果だけを考えればよい。

重み付けされた後の分母は次の y に比例する。

$$y = \sum_i k_i^2 \sigma_i^2 \quad (4.6)$$

ただし、weight function の時間平均が 1 なので、

$$\sum_i k_i = N \quad (4.7)$$

である。したがって、 SNR を最適化するということは、 $\sum_i k_i = N$ という条件のもと y を最小 (極値) にするという事と同じである。この極値問題は Lagrange の未定係数法を使って解くことができる。Lagrange の未定係数を λ として、

$$g = \sum_i k_i^2 \sigma_i^2 - \lambda \left(\sum_i k_i - N \right) \quad (4.8)$$

という関数を考え、この極値問題を解く。まず、 λ について微分すると、

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = \sum_i k_i - N = 0 \quad (4.9)$$

k_i で微分すると、

$$\frac{\partial g}{\partial k_i} = 2k_i\sigma_i^2 - \lambda = 0 \quad (4.10)$$

となる。よって、

$$\lambda = 2k_i\sigma_i^2 \Leftrightarrow k_i = \frac{\lambda}{2\sigma_i^2} \quad (4.11)$$

となる。ここで、式 (4.11) を式 (4.9) に代入して、変形すると、

$$\lambda = \frac{2N}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (4.12)$$

となる。これを式 (4.11) に代入することにより、

$$k_i = \frac{\frac{N}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \propto \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (4.13)$$

となる。つまり、 SNR を最適化する weighting factor は各区間の雑音の分散の逆数である。

4.4 Weight function の作成

前節で述べたように、データに weight function、 $w(t)$ 、をかけることにより SNR を最適化することができる。それは、データ空白部分 (0) と weighting factor を時系列でつなげることにより求められる。

Weight function の規格化

weight function、 $w(t)$ 、をかけた後も、信号の振幅を正しく知る必要があることから、その補正因子を求める。式 (3.6) で $o(t) = h(t)$ としたときに式 (3.12) の $o'(t)$ の重力波周波数成分は最大振幅をもつ。この周波数を f_r とおき、その成分のみに注目して考える。そこで、単色光 A: $o'(t) = D \exp(2i\pi f_r t)$ とおくと、式 (3.13) において $f_0 = f_r$ で $|c(f_0)|^2$ は、

$$D^2 T^2 \quad (4.14)$$

となる。

一方、

$$o'(t) = D \exp(2i\pi f_r t) w(t) \text{ とおいたときの } f_0 = f_r \text{ での } |c(f_0)|^2$$

と、

$$o'(t) = D w(t) \text{ とおいたときの } f_0 = 0 \text{ での } |c(f_0)|^2$$

とは等しい。その $|c(f_0)|^2$ は、

$$D^2 |\tilde{w}(0)|^2 \quad (4.15)$$

となる。ここで、 $\tilde{w}(f)$ は $w(t)$ の Fourier 変換で、

$$\tilde{w}(f) = \int_0^T w(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad (4.16)$$

とかける。ゆえに、

$$\tilde{w}(0) = T\bar{w} \quad (4.17)$$

である。なお、 \bar{w} は $w(t)$ の時間平均である。式 (4.17) より、(4.15) は、

$$D^2 |\tilde{w}(0)|^2 = D^2 T^2 \bar{w}^2 \quad (4.18)$$

となる。よって、 $\bar{w} = 1$ ならば (4.14) と (4.15) は等しくなる。すなわち、weight function の時間平均が 1 になるようにあらかじめ規格化しておけば、補正因子を考慮する必要はない。

複数のデータ

第 4.1.2 節の (ii) の方法を用いて複数のデータを足し合わせるとき、補正をする必要があることについて、パワースペクトル密度を使って説明する。

2 つのデータ D_1 、 D_2 の規格化されていない weight function、 w_1 、 w_2 、の時間平均をそれぞれ \bar{w}_1 、 \bar{w}_2 、データの全時間をそれぞれ T_1 、 T_2 とする。また、 w_1 、 w_2 の合計を、

$$S_1 = T_1 \bar{w}_1 \quad (4.19)$$

$$S_2 = T_2 \bar{w}_2 \quad (4.20)$$

とおく。ある単色光 A: $o'(t) = D \exp(2i\pi f_r t)$ に weight function がかった後の、 $f_0 = f_r$ におけるパワースペクトル密度は、式 (4.18) より

$$D_1: \quad D^2 T_1 \bar{w}_1^2 = \frac{D^2 S_1^2}{T_1} \quad (4.21)$$

$$D_2: \quad D^2 T_2 \bar{w}_2^2 = \frac{D^2 S_2^2}{T_2} \quad (4.22)$$

である。これより、単色光 A の D_1 と D_2 でのパワースペクトル密度の比は

$$\frac{S_1^2}{T_1} : \frac{S_2^2}{T_2} \quad (4.23)$$

となるべきである。

ここで、単色光 A が本来もつ D_1 と D_2 でのパワースペクトル密度の合計は、

$$D^2 (T_1 + T_2) \quad (4.24)$$

である。よって、単色光 A が weight function がかったと後にもつべき D_1 、 D_2 でのパワースペクトル密度は、

$$D_1: \quad D^2 (T_1 + T_2) \cdot \frac{\frac{S_1^2}{T_1}}{\frac{S_1^2}{T_1} + \frac{S_2^2}{T_2}} \quad (4.25)$$

$$D_2: \quad D^2 (T_1 + T_2) \cdot \frac{\frac{S_2^2}{T_2}}{\frac{S_1^2}{T_1} + \frac{S_2^2}{T_2}} \quad (4.26)$$

である。

一方、 D_1 、 D_2 で、それぞれ時間平均 1 の weight function をデータにかけたときに得られるパワースペクトル密度は

$$D_1 : D^2 T_1 \quad (4.27)$$

$$D_2 : D^2 T_2 \quad (4.28)$$

となる。これらを補正して式 (4.25)、(4.26) にする。その補正因子は、

$$D_1 : \frac{(T_1 + T_2) T_2}{T_1} \cdot \frac{S_1^2}{T_2 S_1^2 + T_1 S_2^2} \quad (4.29)$$

$$D_2 : \frac{(T_1 + T_2) T_1}{T_2} \cdot \frac{S_2^2}{T_2 S_1^2 + T_1 S_2^2} \quad (4.30)$$

である。つまり、(4.27)·(4.29)=(4.25)、(4.28)·(4.30)=(4.26)、である。特に $T_1 = T_2$ のときの補正因子は、式 (4.29)、(4.30) より、

$$D_1 : \frac{2S_1^2}{S_1^2 + S_2^2} \quad (4.31)$$

$$D_2 : \frac{2S_2^2}{S_1^2 + S_2^2} \quad (4.32)$$

となる。

Weight function の影響

時間領域におけるデータと weight function のかけ合わせは、周波数領域においてはデータの Fourier 変換と weight function の Fourier 変換との畳み込み積分となる。

正弦波信号の場合、1 つの周波数成分は weight function の Fourier 変換による複数の sidebands に分裂する。しかし、weight function が DC 成分を支配的にもつ限り、weight function の影響は DC 成分の振幅変化だけである。

一方、白色雑音に weight function をかけても白色雑音のままであることが分かっている。したがって、weight function のかかった雑音が時間領域で非定常になっても、周波数領域では白色のままである。これは、weight function が周期的な空白部分をたとえ含んでいたとしても、周期的な信号を作るわけではないことを意味する。

以上の考察から、データに weight function、 $w(t)$ 、をかけることにより SNR は最適化されるということが出来る。

Weight function の図

図 4.1 に、時間平均 1 で規格化された weight function を時間領域で示した。この Weight function、 $w(t)$ 、は 1Hz でリサンプルされた時系列データを重み付けするために使われる。

図 4.2 は weight function をの FFT を表す。DC 成分が他の周波数成分より $10^{1.25} \simeq 17.8$ 以上大きい。

図 4.3 は、calibration 後の Run140 の時系列データである。そのデータに時間平均 1 の weight function をかけものを示したのが図 4.4 である。weight function をかけることにより、データ空白部分の値が 0 となっている。また、雑音レベルが weighting factor で規格化されていることが分かる。

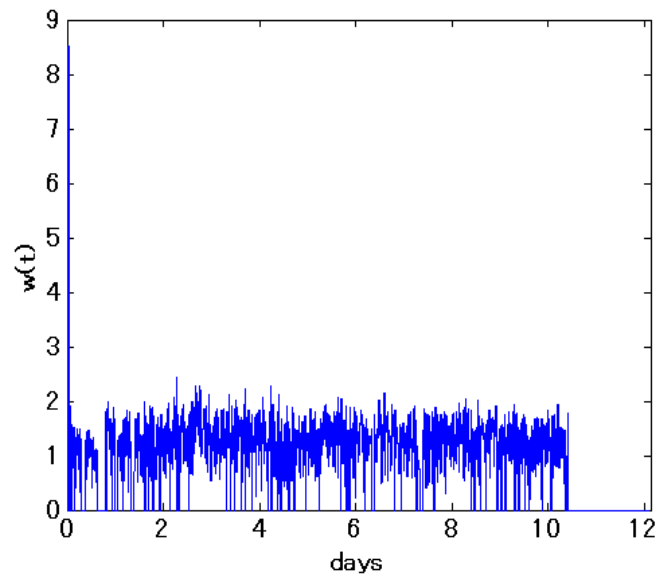


図 4.1: Run140 に対する weight function の時系列 $w(t)$ であり、時間平均が 1 となるように規格化されている。縦軸、横軸は共に線形であり、横軸の単位は days である。この weight function、 $w(t)$ 、は 1Hz でリサンプルされた時系列データを重み付けするために使われる。

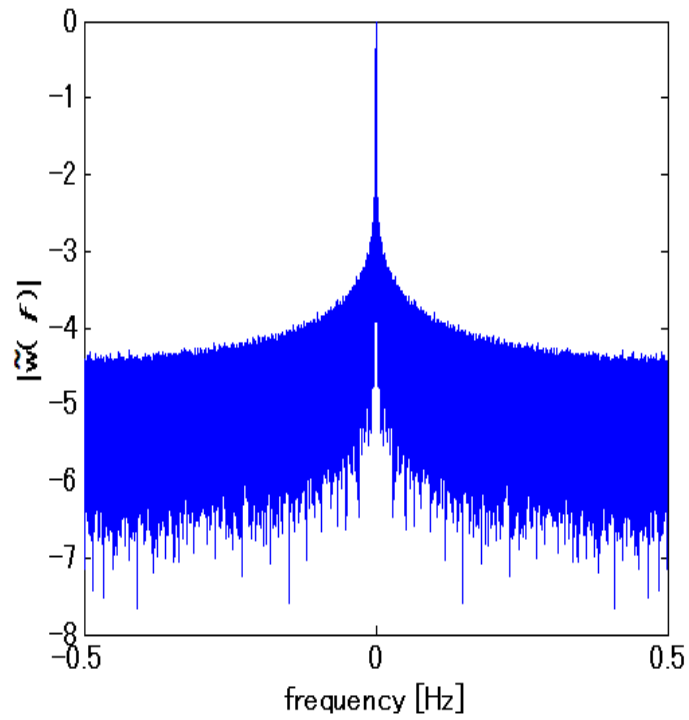


図 4.2: Run140 に対する weight function の FFT、 $\tilde{w}(f)$ 、である。横軸は周波数 [Hz]、縦軸のスケールは \log_{10} である。DC 成分 $|\tilde{w}(0)|$ が 1 となるように規格化して示した。

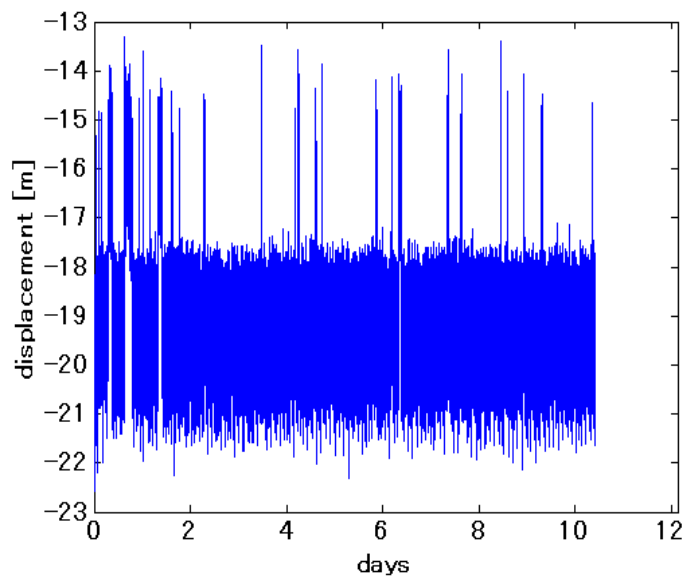


図 4.3: calibration 後の Run140 の時系列データ。横軸の単位は days、縦軸のスケールは \log_{10} である。

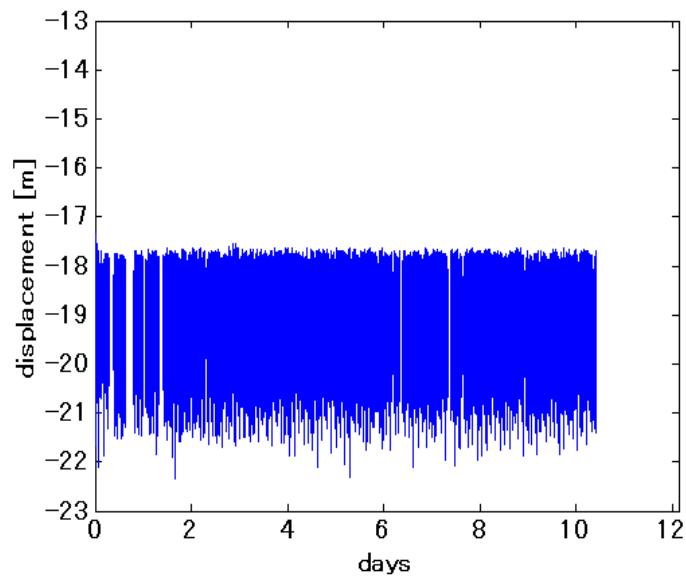


図 4.4: 図 4.3 のデータに時間平均 1 の weight function をかけた時系列データ。横軸の単位は days、縦軸のスケールは \log_{10} である。weight function をかけることにより、データ空白部分の値が 0 となっている。また、雑音レベルが weighting factor で規格化されていることが分かる。

第5章 SNロス

今回の解析で SNR を減少させる原因は、パルサーの未知パラメータによるところが大きい。パルサーの未知パラメータによる SNR 減少に対しては、それを抑えるために複数個の補正パラメータ値 (テンプレート) を用いた。

ターゲット重力波のパラメータ値は完全には分かっていない (表 2.3)。実際に伝播してくる重力波のパラメータ値と補正パラメータ値がずれてしまうと、そのずれの効果で SNR は低下してしまう。今回の解析ではこのずれによる SN ロスをなるべく小さく抑えるために次のような手法を使った。それは、ある補正パラメータ値 1 個で補正を行って 1 個の結果を得るのではなく、与えられたパラメータ範囲を分割する複数の補正パラメータ値それぞれで補正を行って複数個の結果を得、その中から最大の SNR を取り出すという手法である。

補正パラメータ値の個数を増やせば増やす程、SN ロスを 0 に近づけることができる。しかし、個数を増やした分だけ計算時間も増えてしまう。そこで、ある SN ロスの限度内で最適な補正パラメータ値を求める必要がある。今回の解析では 3 つの未知パラメータに対して 4 つの補正を行った。それぞれでの SNR のロスと補正パラメータ値をこの章で述べる。

5.1 SNG

実際に伝播してくる重力波の未知パラメータ値をそれぞれ、パルサー回転軸方向と重力波の伝播方向とのなす角度 θ_r 、重力波スピンドアウン C_r 、重力波周波数 f_r とおくと、 SNR の式 (3.18) の分子 $|c_h|^2$ は式 (3.9) より、

$$S \simeq \frac{1}{2} \left| \int_0^T F(t, \theta_r) F(t, \theta) e^{i(\phi(t, \theta_r) - \phi(t, \theta))} e^{-i2\pi(C_r - C)t^2} e^{i2\pi(f_r - f_0)\delta t} e^{i2\pi(f_r - f_0)t} dt \right|^2 \quad (5.1)$$

となる。ここで、新たに S を用いた。また、式 (5.1) は、次の関係式を使って導いた。

$$\left| \int \sin(\omega t) e^{-i(\omega' t + \phi')} dt \right|^2 \simeq \frac{1}{2} \left| \int e^{i(\omega t)} e^{-i(\omega' t + \phi')} dt \right|^2 \quad (5.2)$$

ただし、 ω 、 ω' 、 ϕ' は定数である。

式 (5.1) から分かるように、実際の重力波のパラメータ値から補正パラメータ値がずれてしまうと、そのずれの効果で S は減少する、すなわち SNR は低下してしまう。そして、 S が最大 S_{\max} になるのは、補正パラメータ値が実際の未知パラメータ値に一致するとき、すなわち、 $(\theta, C, f_0) = (\theta_r, C_r, f_r)$ のときであり、

$$S_{\max} = \frac{1}{2} \left| \int_0^T F(t, \theta_r) F(t, \theta) \right|^2 \quad (5.3)$$

となる。 S_{\max} で規格化することにより、SN 取得率 (SNG) は次のようにかける。

$$SNG = \frac{S}{S_{\max}} \quad (5.4)$$

表 5.1: 各データ期間に対する補正パラメータ (θ, C) 値の最適な集合

解析名	θ (範囲: $0 \sim \frac{\pi}{2}$ rad)	C (範囲: $2 \sim 3 \times 10^{-10}$ Hz/s)	全個数	SNG_1
{Run140A},{Run140B} 連続 5.5 日間	$\frac{13}{40}\pi, \frac{81}{200}\pi, \frac{9}{20}\pi, \frac{97}{200}\pi$	250 等分 間隔 4×10^{-13} Hz/s	1004 個	98% 以上
{Run140},{Run128} 連続 11 日間	$\frac{13}{40}\pi, \frac{81}{200}\pi, \frac{9}{20}\pi, \frac{97}{200}\pi$	1000 等分 間隔 $1 \times 1 \times 10^{-13}$ Hz/s	4004 個	98% 以上
{Run128+Run140} 合計 20 日間	$\frac{13}{40}\pi, \frac{81}{200}\pi, \frac{9}{20}\pi, \frac{97}{200}\pi$	125 万等分 間隔 8×10^{-17} Hz/s	5×10^6 個	98% 以上
連続 40 日間	$\frac{63}{200}\pi, \frac{79}{200}\pi, \frac{87}{200}\pi, \frac{93}{200}\pi, \frac{49}{100}\pi$	10000 等分 間隔 8×10^{-17} Hz/s	50005 個	98% 以上

実際の未知パラメータ値から補正パラメータ値がずれてしまう効果による SNG 減少をなるべく小さく抑えるために補正パラメータ (θ, C, f_0) の値を複数個用意した集合を作る。さらに、補正パラメータ値の集合を最適なものにする。これは、SN ロスに対するある限度のもとで補正パラメータ値の個数を最小にすることを意味する。

5.2 補正パラメータ (θ, C) 値の最適な集合

パルサー回転軸方向と重力波の伝播方向とのなす角度、重力波スピンドウンの補正パラメータ (θ, C) 値の最適な集合を求める。

まず、パルサー回転軸方向と重力波の伝播方向とのなす角度、重力波スピンドウン、に対する補正パラメータが実際の未知パラメータ値からずれることによる SNG_1 を導く。このとき、重力波周波数については補正パラメータが実際の未知パラメータ値に一致するとする。すなわち、 $f_0 = f_r$ である。よって SNG_1 は式 (5.1)(5.3)(5.11) より、

$$SNG_1 = \frac{\left| \int_0^T F(t, \theta_r) F(t, \theta) e^{i(\phi(t, \theta_r) - \phi(t, \theta))} e^{-i2\pi(C_r - C)t^2} dt \right|^2}{\left| \int_0^T F(t, \theta_r) F(t, \theta) \right|^2} \quad (5.5)$$

となる。 SNG_1 を 98% 以上、すなわち SN ロスが 2% 以下にする。

補正パラメータ C 値は等間隔な場合が最適である。そこで、初めに C 値の集合をある等間隔な値に固定する。そして、その時個数が最小となる補正パラメータ θ 値を見つける。こうして、 C 値の集合をある等間隔な値に固定したときの (θ, C) 値の最適な個数が求まる。次に C 値の集合を別の等間隔な値に固定して、同様に (θ, C) 値の最適な個数を求める。以上の操作を繰り返すことにより、色々な C 値に対して (θ, C) 値の最適な個数が求まる。それぞれの C 値に対する (θ, C) 値の最適な個数の中で最小の個数となる場合が最も最適なときである。この場合の (θ, C) 値が最適な集合である。

各データ期間に対する補正パラメータ (θ, C) 値の最適な集合を表 5.1 に示す。データの連続期間が長くな

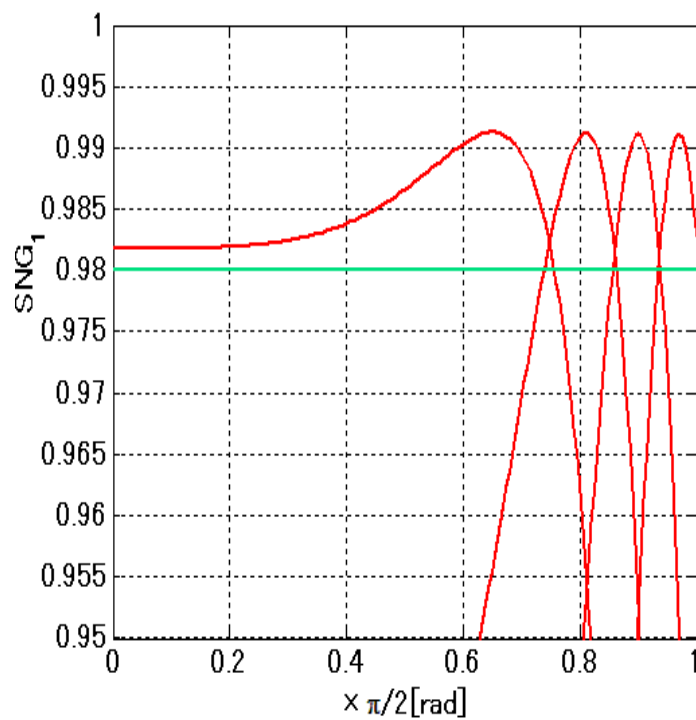


図 5.1: 補正パラメータ θ をある値に固定したとき、実際の未知パラメータ値 θ_r による SNG 変化を表す、ただし、Run140 の期間 (11 日間) の場合である。 $\theta(\frac{13}{40}\pi, \frac{81}{200}\pi, \frac{9}{20}\pi, \frac{97}{200}\pi)$ のときを左から順に重ねて描いたものである。青線は $C_r - C = 0.5 \times 10^{-13}$, 赤線は $C_r - C = 0.5 \times 10^{-13}$ のときのものである。緑線は SNG が 98% の位置を示す。 θ_r が等間隔ではないことが分かる。実際の未知パラメータ値 θ_r が範囲 ($0 \sim \frac{\pi}{2}$ rad) 内のどの値であっても SNG₁ が 98% 以上であることが分かる。

るほど、補正パラメータ値の数は多くなる。データ {Run128+Run140} については補正パラメータ値の数が特に多い。Run128 開始時刻と Run140 開始時刻の時間差は約 1 年ある。そのために、Run140 開始時刻における連続波の位相と周波数の不定性が大きくなる。これが、補正パラメータ値の数が多くなってしまう原因である。

図 5.1 は、補正パラメータ θ をある値に固定したとき、実際の未知パラメータ値 θ_r による SNG 変化を表す、ただし、Run140 の期間 (11 日間) の場合である。 $\theta(\frac{13}{40}\pi, \frac{81}{200}\pi, \frac{9}{20}\pi, \frac{97}{200}\pi)$ のときを左から順に重ねて描いたものである。青線は $C_r - C = 0.5 \times 10^{-13}$, 赤線は $C_r - C = 0.5 \times 10^{-13}$ のときのものである。 θ_r が等間隔ではないことが分かる。実際の未知パラメータ値 θ_r が範囲 ($0 \sim \frac{\pi}{2}$ rad) 内のどの値であっても SNG_1 が 98% 以上であることが分かる。

5.3 補正パラメータ f_0

重力波周波数の補正パラメータ f_0 値の最適な集合を求める。

まず、重力波周波数の補正パラメータが実際の未知パラメータ値からずれることによる SNG_2 を導く。

このとき、パルサー回転軸方向と重力波の伝播方向とのなす角度、重力波スピンドアウン、については補正パラメータ値が実際の未知パラメータ値に一致するとする。すなわち、 $(\theta, C) = (\theta_r, C_r)$ である。よって、 SNG_2 は式 (5.1)(5.3)(5.11) より、

$$SNG_2 = \frac{\left| \int_0^T F(t, \theta_r) F(t, \theta) e^{i2\pi(f_r - f_0)\delta t} e^{i2\pi(f_r - f_0)t} dt \right|^2}{\left| \int_0^T F(t, \theta_r) F(t, \theta) \right|^2} \quad (5.6)$$

$$\simeq \left| \int_0^T e^{i2\pi(f_r - f_0)\delta t} e^{i2\pi(f_r - f_0)t} dt \right|^2 \quad (5.7)$$

$$\simeq \left| \int_0^T e^{i2\pi(f_r - f_0)\delta t} dt \right|^2 \cdot \left| \int_0^T e^{i2\pi(f_r - f_0)t} dt \right|^2 \quad (5.8)$$

となる。これは、 $(f_r - f_0)\delta t$ による SNG_3 と $(f_r - f_0)t$ による SNG_4 とに分けて計算する。

5.3.1 補正パラメータ f_0 値の最適な集合

式 (5.8) より、 $(f_r - f_0)\delta t$ による SNG_3 は、

$$SNG_3 = \left| \int_0^T e^{i2\pi(f_r - f_0)\delta t} dt \right|^2 \quad (5.9)$$

である。 SNG_3 が 98% 以上、すなわち SN ロスが 2% 以下にする。

各データ期間に対する補正パラメータ f_0 値の最適な集合を表 5.2 に示す。データの連続期間が長くなるほど、補正パラメータ値の数は多くなる。{Run140} と {Run128} は期間が同じにもかかわらず全個数が異なる。これは、観測時期によってドップラーシフト δt の値が異なるからである。

図 5.2 は補正パラメータ f_0 に対して実際の未知パラメータ値 f_r のずれ $(f_r - f_0)$ による SNG_3 変化を表す。{Run128+Run140}、{Run128}、{Run140}、{Run140A}、{Run140B}、のときを左から順に重ねて描いたものである。 $(f_r - f_0)$ [Hz]、がそれぞれ、 6.25×10^{-3} [Hz]、 1.67×10^{-2} [Hz]、 2.5×10^{-2} [Hz]、 5×10^{-2} [Hz]、の範囲で SNG_3 が 98% 以上であることが分かる。観測合計期間が長くなるほどその範囲は狭くなることが分かる。その結果、補正パラメータ f_0 値の個数は増える。

表 5.2: 各データ期間に対する補正パラメータ f_0 値の最適な集合

解析名	f_0 (範囲:934.858 ~ 934.958Hz)	全個数	SNG_3
{Run140A} ,{Run140B} 連続 5.5 日間	934.908Hz	1 個	98% 以上
{Run140} 連続 11 日間	934.883, 934.933Hz	2 個	98% 以上
{Run128} 連続 11 日間	934.8745, 934.908, 934.9415Hz	3 個	98% 以上
{Run128+Run140} 全 20 日間	934.86425 ~ 934.95175Hz を 0.0125Hz おきに 8 個	8 個	98% 以上

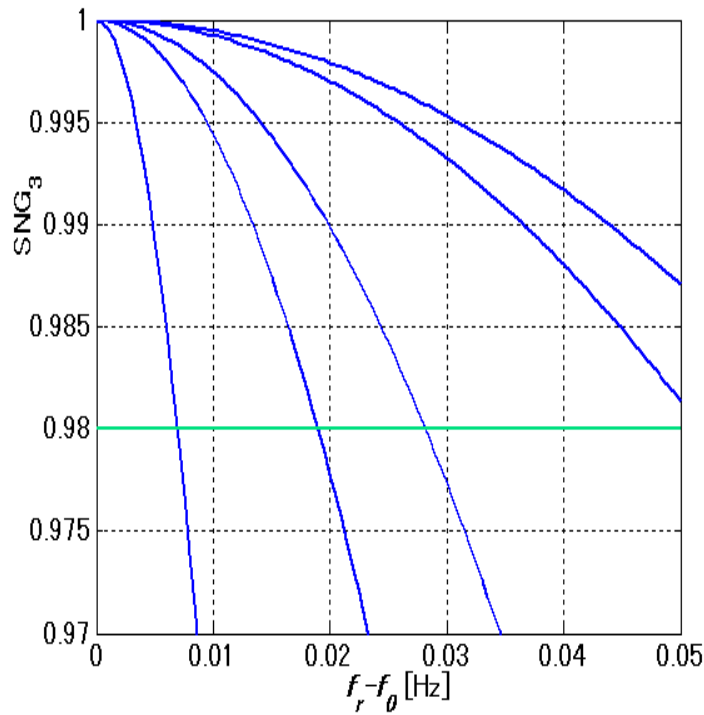


図 5.2: 補正パラメータ f_0 に対して実際の未知パラメータ値 f_r のずれ ($f_r - f_0$) による SNG_3 変化を表す。
 {Run128+Run140}、{Run128}、{Run140}、{Run140A}、{Run140B}、のときを左から順に重ねて描いたものである。緑線は SNG が 98% の位置を示す。 $(f_r - f_0)$ [Hz]、がそれぞれ、 6.25×10^{-3} [Hz]、 1.67×10^{-2} [Hz]、 2.5×10^{-2} [Hz]、 5×10^{-2} [Hz]、の範囲で SNG_3 が 98% 以上であることが分かる。観測合計期間が長くなるほどその範囲は狭くなる事が分かる。その結果、補正パラメータ f_0 値の個数は増える。

5.3.2 補正值 Δf_m の最適な集合

式(5.8)より、 $(f_r - f_0)t$ による SNG_4 は、

$$SNG_4 = \left| \int_0^T e^{i2\pi(f_r - f_0)t} dt \right|^2 \quad (5.10)$$

である。

SNG_4 95% 以上、すなわち SN ロス 5% 以下にする。

ところで、式(3.13)での FFT により f_0 は間隔 $\frac{1}{MT}$ で区切られる。しかし、この間隔は最適な集合での f_0 の間隔より大きくなる。つまり、FFT による f_0 の間隔 $\frac{1}{MT}$ では不十分であり、 f_0 の間隔をより細かく区切る必要がある。

FFT により区切られる f_0 間隔 $\frac{1}{MT}$ をさらに M 倍細かく区切って、 f_0 間隔を $\frac{1}{MT}$ にする場合を考える。このとき、 f_0 間隔 $\frac{1}{MT}$ で式(3.13)の c^2 を計算するためには、

$$|c(f_0)|^2 = \left| \int_0^T o'(t) e^{-i2\pi(f_0 + \Delta f_m)t} dt \right|^2 \quad (5.11)$$

として、 M 個の Δf_m に対して $|c(f_0)|^2$ を計算する。ただし、

$$\Delta f_m = \frac{m}{MT} \quad (m = 0, 1, \dots, M-1) \quad (5.12)$$

である。ここで、

$$o''(t) = o'(t) e^{-i2\pi \Delta f_m t} \quad (5.13)$$

とおくと、

$$|c(f_0)|^2 = \left| \int_0^T o''(t) e^{-i2\pi f_0 t} dt \right|^2 \quad (5.14)$$

となり、式(3.13)の $o'(t)$ を $o''(t)$ に置き換えたものになる。すなわち、データ $o'(t)$ に対して補正項 $e^{-i2\pi \Delta f_m t}$ をかけて $o''(t)$ にしてやれば、この補正された M 個のデータ $o''(t)$ それぞれに式(5.14)を適用して $|c(f_0)|^2$ を得ることができる。これは、 f_0 間隔 $\frac{1}{MT}$ で式(3.13)の $|c(f_0)|^2$ を計算したことに等しい。そこで、補正パラメータ f_0 値の集合の代わりに M 個の補正值 Δf_m からなる集合を求めることにする。

このとき、各データ期間に対する補正值 Δf_m の最適な集合を表(5.3)に示す。データの連続期間が長くなるほど、補正值 Δf_m の間隔は小さくなる。

図5.3は補正パラメータ f_0 に対して実際の未知パラメータ値 f_r のずれ $(f_r - f_0)$ による SNG_4 変化を表す。{Run128+Run140}、{Run140}、{Run140A} のときを左から順に重ねて描いたものである。赤丸は補正值 Δf_m を用いないときのずれ $(f_r - f_0)$ 最大点を示す。緑丸は、補正值 Δf_m を用いたときのずれ $(f_r - f_0)$ 最大点を示す。赤丸の部分では {Run140}、{Run140A} に対しては SNG_4 が約 40% である。{Run128+Run140} に対しては SNG_4 が約 0% である。この理由は、{Run128} と {Run140} とを別々に FFT した結果 bin 幅が 2 倍になっているからである。 $(f_r - f_0)$ が緑丸より小さい範囲でそれぞれ SNG_4 が 95% 以上であることが分かる。観測合計期間が長くなるほどその範囲は狭くなることが分かる。

表 5.3: 各データ期間に対する補正值 Δf_m の最適な集合

解析名	FFTにより区切られる f_0 間隔 $\frac{1}{T}$ [Hz]	補正值 Δf_m [Hz] ($m = 0, 1, \dots, M - 1$)	補正值の個数 M	SNG_4
{Run140A}, {Run140B} 連続 5.5 日間	$\frac{1}{2^{19}}$ Hz	$\frac{m}{2^{21}}$ Hz	4	95% 以上
{Run140A+Run140B} 各連続 5.5 日間	$\frac{1}{2^{19}}$ Hz	$\frac{m}{2^{22}}$ Hz	8	95% 以上
{Run140}, {Run128} 連続 11 日間	$\frac{1}{2^{20}}$ Hz	$\frac{m}{2^{22}}$ Hz	4	95% 以上
{Run128+Run140} 各連続 11 日間	$\frac{1}{2^{20}}$ Hz	$\frac{m}{2^{23}}$ Hz	8	95% 以上

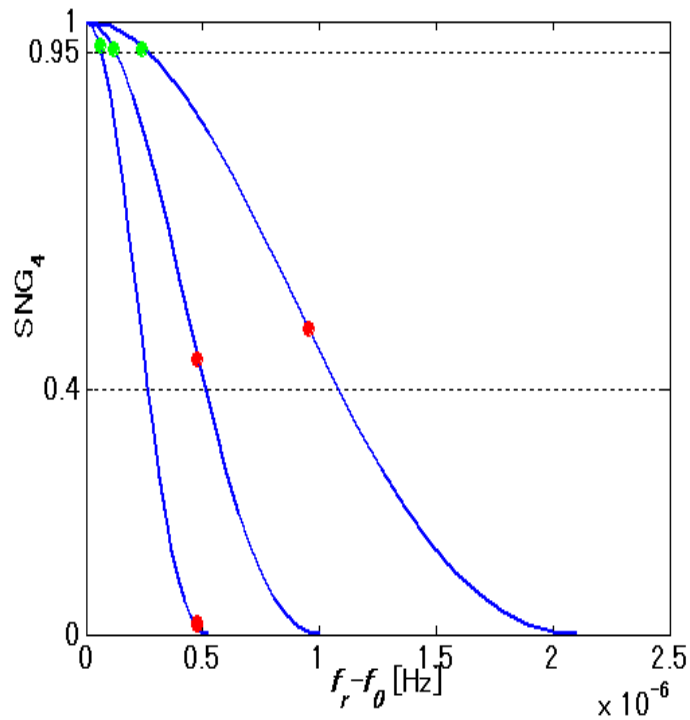


図 5.3: 補正パラメータ f_0 に対して実際の未知パラメータ値 f_r のずれ ($f_r - f_0$) による SNG_4 変化を表す。
 {Run128+Run140}、{Run140}、{Run140A} のときを左から順に重ねて描いたものである。赤丸は補正值 Δf_m を用いないときのずれ ($f_r - f_0$) 最大点を示す。緑丸は、補正值 Δf_m を用いたときのずれ ($f_r - f_0$) 最大点を示す。

表 5.4: 補正パラメータ $(\theta, C, f_0, \Delta f_m)$ 値の最適な集合のまとめ

解析名	(θ, C) 個数 SNG_1 98% 以上	f_0 個数 SNG_3 98% 以上	Δf_m 個数 M SNG_4 95% 以上	$(\theta, C, f_0, \Delta f_m)$ 全個数 SNG_{all} 91% 以上
{Run140A} ,{Run140B} 連続 5.5 日間	1004 個	1 個	4 個	4016 個
{Run140A+Run140B} 全 11 日間 (各 5.5 日間)	4004 個	2 個	8 個	64064 個
{Run140} 連続 11 日間	4004 個	2 個	4 個	32032 個
{Run128} 連続 11 日間	4004 個	3 個	4 個	48048 個
{Run128+Run140} 全 22 日間 (各 11 日間)	5×10^6 個	8 個	8 個	2.3×10^8 個

表 5.5: {Run140A+Run140B}' と {Run140A+Run140B} に対する補正パラメータ値の個数。ただし、 SNG_{all} 91% 以上である。

解析名	$(\theta, C, f_0, \Delta f_m)$ 全個数
{Run140A+Run140B}'	8032 個
{Run140A+Run140B}	128128 個

5.4 補正パラメータのまとめと結論

全補正パラメータ (θ, C, f_0) 値と補正值 Δf_m に対する SNG は、

$$SNG_{all} \simeq SNG_1 \cdot SNG_3 \cdot SNG_4 \quad (5.15)$$

とかける。

いままでの、全補正パラメータ (θ, C, f_0) 値と補正值 Δf_m の最適な集合をまとめたものを表 5.4 に示す。表 5.4 から、実際に解析するときの個数を求める。

{Run140A+Run140B}' に対する最適な集合は、表 5.4 の {Run140A}、{Run140B} に対する最適な集合と等しくなる。補正パラメータ値の個数について、{Run140A+Run140B}' に対するものと {Run140A+Run140B}' に対するものを表 5.5 に示す。両方とも、{Run140A}、{Run140B} それぞれの場合を合わせるので、表 5.4 での個数の 2 倍になる。また、補正パラメータ値 $(\theta, C, f_0, \Delta f_m)$ 1 個に対する計算時間は、5.5 日分データを FFT するのにかかる時間にほぼ等しい。

{Run128+Run140}' に対する最適な集合は、表 5.4 の {Run128A}、{Run140} に対する最適な集合と等しくなる。なお、{Run128} に対する個数の方が {Run140} に対する個数より多いので、{Run128} に対する補正パラメータ値に合わせる。補正パラメータ値の個数について、{Run128+Run140}' に対するものと {Run128+Run140} に対するものを表 5.6 に示す。両方とも、{Run128}、{Run140} それぞれの場合を合わ

表 5.6: $\{\text{Run128+Run140}\}'$ と $\{\text{Run128+Run140}\}$ に対する補正パラメータ値の個数。ただし、 $SNG_{all}91\%$ 以上である。

解析名	$(\theta, C, f_0, \Delta f_m)$ 全個数
$\{\text{Run128+Run140}\}'$	96096 個
$\{\text{Run128+Run140}\}$	4.6×10^8 個

せるので、表 5.4 での個数の 2 倍になる。また、補正パラメータ値 $(\theta, C, f_0, \Delta f_m)$ 1 個に対する計算時間は、11 日分データを FFT するのにかかる時間にほぼ等しい。

表 5.5 の $\{\text{Run140A+Run140B}\}$ に対する補正パラメータ値の個数は 128128 個である。これは、現実的に計算できる値である。したがって、開始時刻の時間差が小さいデータ同士を足し合わせる際には、第 4.1.2 節の方法 (i) を用いるべきである。一方、表 5.6 の $\{\text{Run128+Run140}\}$ に対する補正パラメータ値の個数は 4.6×10^8 個である。これは、現実的に計算できる値ではない。これは、Run128 開始時刻と Run140 開始時刻との時間差が大きいことにある。したがって、開始時刻の時間差が大きいデータ同士を足し合わせる際には、第 4.1.2 節の方法 (ii) を用いるべきである。

第6章 解析結果と解釈

これまで述べてきた手順に従い、DT9内のR140A(5.5日)とR140B(5.5日)の2つのデータに対して第4.1.2節に示した4種類の解析を行った。初めに、CHTによってデータを圧縮した。この操作により、サンプリング周波数は20kHzから1Hzに減少した。このデータの内、0.1Hzの周波数帯域を解析に使った。これは、元のデータの 934.908 ± 0.05 Hz帯域を抜き出すことに相当する。観測された周波数とスピンドアウンから見積もられた重力波周波数を含むように、この探索範囲を選択した。リサンプルされたデータを雑音レベルに応じて重み付けした。その後、FFTを使うことによりこのデータに対してmatched filteringを行った。その際、2種類の方法で2つのデータの足し合わせを行った。さらに、matched filteringの結果を調べるためにcoincidence解析も行った。

パルサーの未知パラメータは表2.3に示した。実際の重力波の未知パラメータ値と補正パラメータ値のずれがあるときのSNロス、表5.5に示したように、9%以下である。

6.1 解析の種類

表6.1に解析方法と結果をまとめている。解析名は第4.1.2節に示した4種類の解析である。足し合わせる方法(i)、(ii)は、

- (i) 第3.3節、第3.1.5節で説明したように、複数のデータに対して、位相差を考慮して周波数領域で足し合わせるにより $|c(f_0)|^2$ を得る方法。このとき、複数のデータの合計観測時間を T とすると SNR は T に比例して増加する。
- (ii) 第3.2.1節で説明したように、複数のデータに対して別々に $|c(f_0)|^2$ を求めた後に、それぞれのスペクトル上で予想される連続波信号の周波数成分からの $|c(f_0)|^2$ を足し合わせる方法。このとき、複数のデータの合計観測時間を T とすると、 SNR は \sqrt{T} に比例して増加する。

である。coincidence解析の項は、coincidence解析を行ったか、行わなかったか、を示す。coincidence解析の結果については第6.4節、第6.4.2節に示す。補正パラメータ全個数とは、第5.4節で説明した全補正パラメータ (θ, C, f_0) 値と補正值 Δf_m の個数である。

6.2 matched filteringの結果

matched filteringによる探索結果の統計量の値が表6.1の SNR_{\max}^* であり、これは今回の解析で最も重力波らしい信号である。 SNR_{\max}^* が得られたときの補正パラメータの値が、 θ, C, f_0 である。そこで、 SNR_{\max}^* が有意な値かどうかを知る必要がある。すなわち、重力波がない場合でも SNR_{\max}^* は起こりえる値かどうかを知る必要がある。そのためには、次の偶然確率の値を知ればよい。 $P_0(SNR_{\max}^*)$ は偶然確率の値であり、

$$P_0(SNR_{\max}^*) = \int_{SNR_{\max}^*}^{\infty} p(SNR_{\max} | h_0 = 0) d(SNR_{\max}) \quad (6.1)$$

表 6.1: 解析方法と結果のまとめ

解析名	{R140A+R140B}	{R140A+R140B}'	{R140A+R140B} _c	{R140A+R140B}' _c
足し合わせる方法	(i)	(ii)	(i)	(ii)
Coincidence 解析	なし	なし	あり	あり
補正パラメータ全個数	128128 個	8032 個	128128 個	8032 個
θ [rad]	$\frac{9}{20}\pi$	$\frac{97}{200}\pi$	$\frac{9}{20}\pi$	$\frac{9}{20}\pi$
C [Hz/s]	2.858×10^{-10}	2.016×10^{-10}	2.858×10^{-10}	2.416×10^{-10}
f_0 [Hz]	934.8830	934.9080	934.8830	934.9080
SNR_{max}^*	16.741	13.851	16.781	13.324
$P_0(SNR_{max}^*)$	0.92	0.69	0.92	0.69
h_r^{inject} (95%)	3.655×10^{-23}	3.838×10^{-23}	3.655×10^{-23}	3.757×10^{-23}
h_r^{inject} (97.37%)	-	-	3.803×10^{-23}	-
h_r^{inject} (97.27%)	-	-	-	3.896×10^{-23}
upper limit	4.0×10^{-23}	4.2×10^{-23}	4.2×10^{-23}	4.3×10^{-23}

とかける。これは、重力波信号がないときに、 SNR_{max}^* より大きい値を得る確率である。 $p(SNR_{max}|h_0 = 0)$ を求めるために、実際の重力波の未知パラメータ空間に対して、重力波がないと思われる未知パラメータ空間で同じ範囲をもって来る。そして、それぞれに全く同じ解析を行い SNR_{max} の集合を求める。この集合の中のどこに SNR_{max}^* が位置するかを調べればよい。具体的には、実際の未知パラメータ空間の近くにある、別のパラメータ空間

$$C : 7 \sim 6, 6 \sim 5, \dots, 0 \sim -1, \times 10^{-10}$$

$$f_0 : 934.758 \sim 934.858, 934.958 \sim 935.058$$

などを組み合わせて未知パラメータ空間を作った。なお、 θ ($0 \sim \frac{1}{2}\pi$) に関する別のパラメータ空間はない。解析 {R140A+R140B} の場合を表 6.2 に示す。

SNR_{max}^* が有意な重力波信号なら、他の SNR_{max} より大きい値になるはずである。表 6.2 より、 SNR_{max}^* より大きい値となる SNR_{max} は 13 個中 12 個。すなわち、 $P_0(SNR_{max}^*) \simeq 0.92$ となる。したがって、 SNR_{max}^* は有意な重力波信号とは断言できない。そこで、upper limit を求めた。

図 6.1 は、解析 {R140A+R140B} に対する SNR_{max}^* を含むスペクトルである。すなわち、補正パラメータ $(\theta, C, f_0) = (\frac{9}{20}\pi, 2.858 \times 10^{-10}, 934.8830)$ のとき未知パラメータ f_0 上での SNR である。縦軸 SNR 、横軸は周波数である。赤丸は SNR 最大となるピークであり、 SNR_{max}^* に相当する。

図 6.2 は、解析 {R140A+R140B} に対する (θ, C) 空間上での SNR である。ただし、 SNR は補正パラメータ $f_0 = 934.8830$ のとき周波数上での最大の SNR である。黒丸が SNR_{max}^* に相当する。

図 6.3 は図 6.1 の SNR に対するヒストグラムである。横軸は SNR 、1bin 幅は 0.02 である。縦軸は個数に自然対数をとっている。全個数は 419440 個である。赤丸は SNR_{max}^* に相当する。この図より、 SNR が指数分布に近い形で分布していることが分かる。これは、雑音が白色、かつ、時間領域でガウシアンに近いことによる。

表 6.2: 解析 {R140A+R140B} について別の未知パラメータ空間での SNR_{\max} の値。 SNR_{\max}^* を太字で示した。

C [Hz]	f [Hz]	
	934.808 ± 0.05	934.908 ± 0.05
$-1 \sim 0 \times 10^{-10}$	26.1	18.1
$0 \sim 1 \times 10^{-10}$	16.6	19.7
$1 \sim 2 \times 10^{-10}$	17.4	18.5
$2 \sim 3 \times 10^{-10}$	18.6	16.7
$3 \sim 4 \times 10^{-10}$	19.6	18.1
$4 \sim 5 \times 10^{-10}$	19.4	17.0
$5 \sim 6 \times 10^{-10}$	19.5	18.8

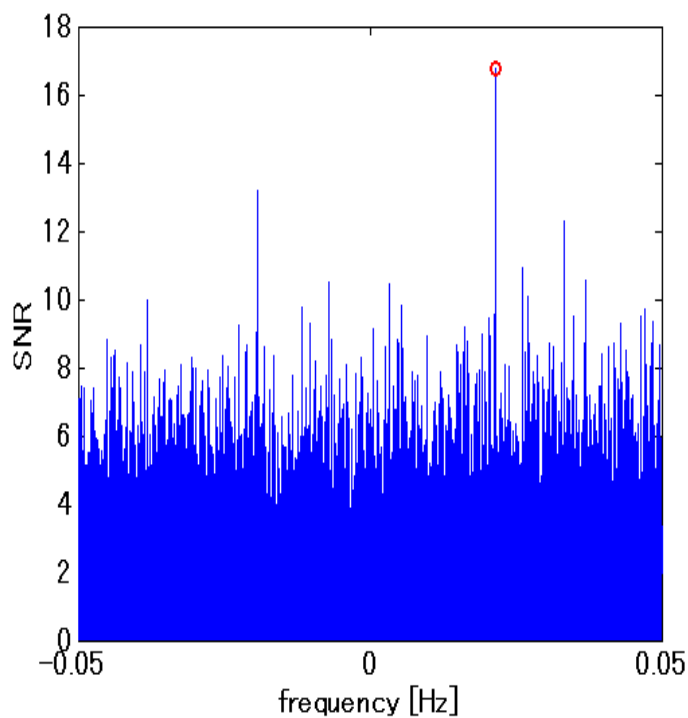


図 6.1: SNR_{\max}^* を含むスペクトルである。すなわち、 $(\theta, C) = (\frac{9}{20}\pi, 2.858 \times 10^{-10})$ のとき未知パラメータ f_0 上での SNR である。赤丸は SNR 最大となるピークであり、 SNR_{\max}^* に相当する。

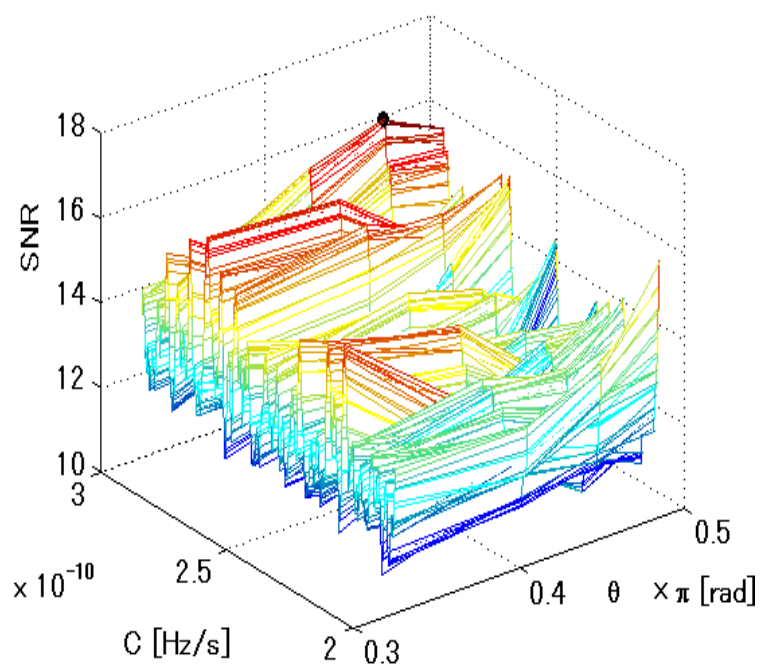


図 6.2: 解析 {R140A+R140B} に対する (θ, C) 空間上での SNR である。ただし、 SNR は補正パラメータ $f_0 = 934.8830$ のとき周波数上での最大の SNR である。黒丸が SNR_{\max}^* に相当する。

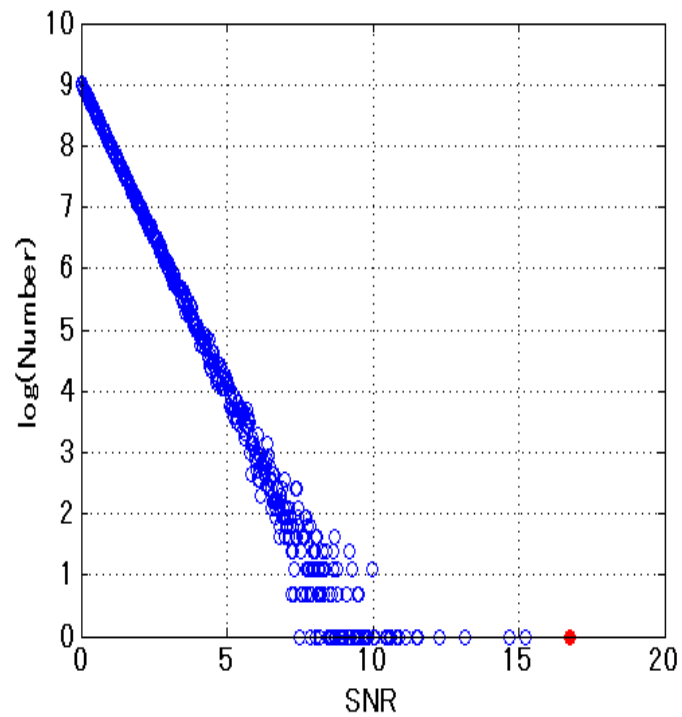


図 6.3: 図 6.1 の SNR に対するヒストグラムである。横軸は SNR 、1bin 幅は 0.02 である。縦軸は個数に自然対数をとっている。全個数は 419440 個である。赤丸は SNR_{\max}^* に相当する。この図より、 SNR が指数分布に近い形で分布していることが分かる。これは、雑音が白色、かつ、時間領域でガウシアンに近いことによる。

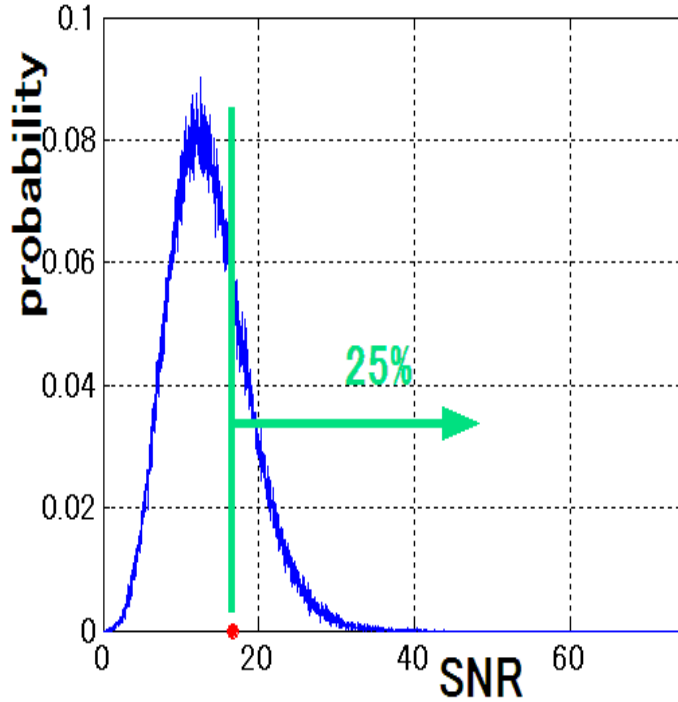


図 6.4: 解析 {R140A+R140B} の場合。 $h_r^{\text{inject}} = 2.5 \times 10^{-23}$ で模擬信号埋め込み simulation を行ったときの確率分布。 SNR_{max}^* と ∞ の間の $p(SNR_{\text{max}}|h_r^{\text{inject}})$ の合計は 0.25 である。

6.3 結果の解釈

upper limit を求めるためには、大きさ $h_r(C)$ をもつ重力波の干渉計出力信号がデータの中に存在するとするとき得られる SNR_{max} の確率分布を知る必要がある。確率分布 $p(SNR_{\text{max}}|h_r)$ を決めるために、合計 strain の大きさ h_r は一定値、周波数以外のパラメータは全て同じで、周波数を少しずらした重力波模擬信号を多数つくる。全ての模擬信号は異なった周波数をもつが、ターゲット重力波信号の予想周波数 934.908Hz 付近の bin にその周波数はある。そして、干渉計出力にこの模擬信号をそれぞれ加えて、同じ波形(それぞれの模擬信号とパラメータを全て一致させた波形)で matched filtering を行う。それぞれの模擬信号による matched filtering の結果から独立な SNR_{max} の値を多数得る (simulation)。そして、この値のヒストグラムを作る。もし、周波数領域で干渉計出力の周波数 bin の近く同士の成分を独立かつ干渉計特有の同じ性格をもつ雑音、と認識できるなら、規格化したヒストグラムが確率密度関数 $p(SNR_{\text{max}}|h_r)$ を表す。そのとき、confidence level は、

$$C(h_r) = \int_{SNR_{\text{max}}^*}^{\infty} p(SNR_{\text{max}}|h_r) d(SNR_{\text{max}}) \quad (6.2)$$

である。

実際には、色々な大きさの h_r^{inject} で模擬信号埋め込み simulation を行い確率分布 $p(SNR_{\text{max}}|h_r^{\text{inject}})$ を求めて、 $C(h_r^{\text{inject}}) = 95\%$ となる h_r^{inject} を探す。このようにして、求めた h_r^{inject} は confidence level 95% の upper limit といえる。図 6.4、6.5、6.6 は、解析 {R140A+R140B} の場合にそれぞれ $h_r^{\text{inject}} = 4.6 \times 10^{-23}$ 、 $h_r^{\text{inject}} = 2.5 \times 10^{-23}$ 、 $h_r^{\text{inject}} = 3.65 \times 10^{-23}$ で模擬信号埋め込み simulation を行ったときの確率分布であ

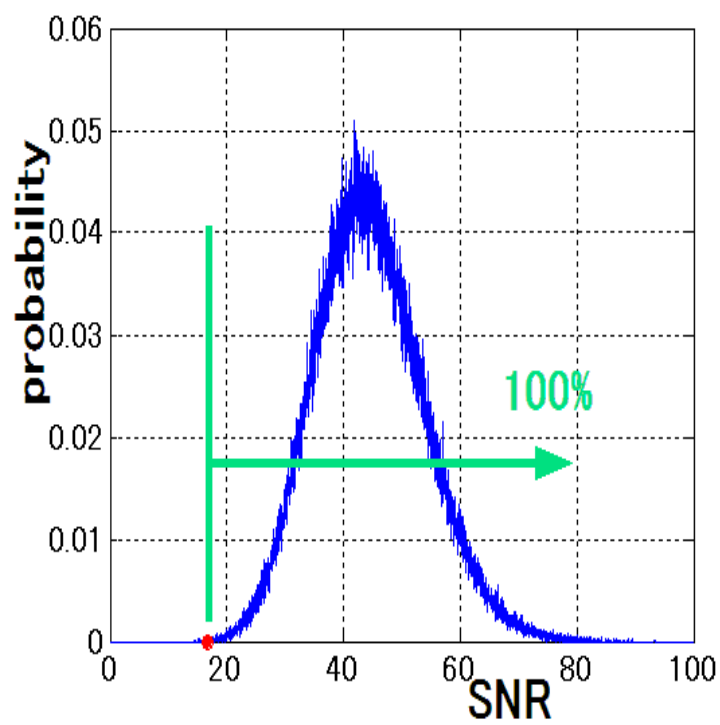


図 6.5: 解析 {R140A+R140B} の場合。 $h_r^{\text{inject}} = 4.6 \times 10^{-23}$ で模擬信号埋め込み simulation を行ったときの確率分布。 SNR_{max}^* と ∞ の間の $p(SNR_{\text{max}} | h_r^{\text{inject}})$ の合計は 1.00 である。

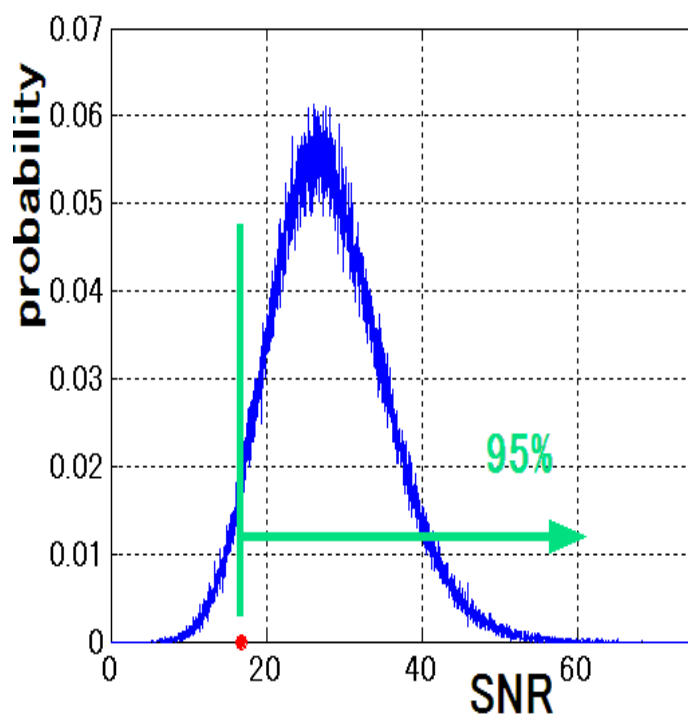


図 6.6: 解析 {R140A+R140B} の場合。 $h_r^{\text{inject}} = 3.65 \times 10^{-23}$ で模擬信号埋め込み simulation を行ったときの確率分布。 SNR_{max}^* と ∞ の間の $p(SNR_{\text{max}} | h_r^{\text{inject}})$ の合計は 0.95 である。

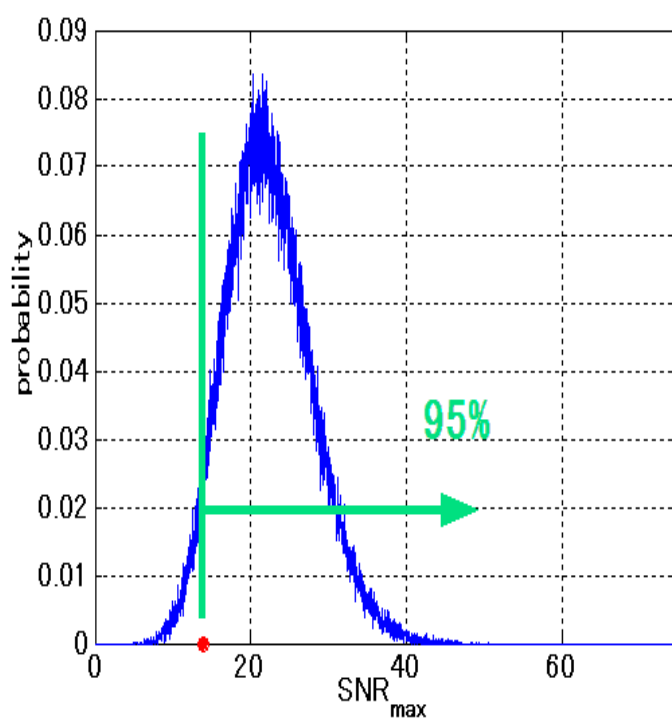


図 6.7: 解析 {R140A+R140B}' の場合。 $h_r^{\text{inject}} = 3.84 \times 10^{-23}$ で模擬信号埋め込み simulation を行ったときの確率分布。 SNR_{max}^* と ∞ の間の $p(SNR_{\text{max}} | h_r^{\text{inject}})$ の合計は 0.95 である。

る。 SNR_{\max}^* と ∞ の間の $p(SNR_{\max}|h_r^{\text{inject}})$ の合計が 0.95 になるのは $h_r^{\text{inject}} = 3.65 \times 10^{-23}$ のときであることが分かる。

SN ロス 9% 以下という条件を含めることにより、合計 $\text{strain}(h_r = \sqrt{h_+^2 + h_{\times}^2})$ に対する upper limit は 4.0×10^{-23} となる。解析 {R140A+R140B}' の場合も同様である。図 6.7 は、解析 {R140A+R140B}' の場合に $h_r^{\text{inject}} = 3.84 \times 10^{-23}$ で模擬信号埋め込み simulation を行ったときの確率分布である。 SNR_{\max}^* と ∞ の間の $p(SNR_{\max}|h_r^{\text{inject}})$ の合計が 0.95 になる。求めた upper limit を表 6.1 の最終行に示す。このとき、confidence level は 95% すなわち、false dismissal rate は 5% である。さらに、この結果を調べるために相関解析を行った。それについて、次節から説明する。

6.4 Coincidence 解析

雑音が多かつガウシアンな場合、matched filtering は最適な検出方法である。しかし、干渉計で起こる実際の雑音は非定常であり、またガウシアンでない。そのため、重力波信号と似たイベント (偽イベント) が作られる。そのような偽イベントを取り除くために 2 つ以上の独立なデータの間で coincidence 解析を行うことは有効である。

6.4.1 今回の coincidence 条件

もし本当の重力波信号が干渉計出力に含まれるならば、2 つのデータに同じ波形が表れる。これは、片方のデータのみで重力波信号と似た波形をもつ信号を偽イベントとして取り除くことができることを意味する。相関解析を行うためには、信号を取り除く条件 (coincidence 条件)、すなわち、明らかに重力波ではない条件を決める必要がある。そこで、実際のデータに模擬信号を加えることにより coincidence 条件を決める。今回の解析では R140A と R140B の 2 つのデータに対しての coincidence 条件を求めた。閾値 $X_T = 0.1$ 、すなわち false dismissal rate 10% とした。

図 6.8 は、閾値 $X_T = 0.1$ 、 $h_r^{\text{inject}} = 3.222 \times 10^{-20}$ で模擬信号埋め込み simulation を行ったとき、 $p(c_A^2, c_B^2) = p_h$ を満たす $(c_A^2, c_B^2)_h$ である。境界線内は確率 $p(c_A^2, c_B^2)$ の大きい方からの合計が、全合計の 90% の部分であり、この領域を重力波候補として残す。

さらに、色々な h_r^{inject} での境界を知る必要がある。そして、 h_r^{inject} の大きさを変えたとき、上位 90% の重なりを採択、それ以外を棄却することにより、明らかに重力波ではない信号を取り除くことができる。図 6.9 は、閾値 $X_T = 0.1$ のときの coincidence 条件について、採用領域と棄却領域の境界線である。図 6.10 は、図 6.9 を拡大したものである。実際のデータに対して coincidence 解析を行うときに使う部分である。

$h_r^{\text{inject}} = 3.65 \times 10^{-20}$ 付近の模擬信号で埋め込み simulation を行ったとき、今回の相関条件に対する false dismissal rate は 2.3% となった。

6.4.2 Coincidence 解析の結果

解析 {R140A+R140B}' の場合を示す。表 6.1 より、解析 {R140A+R140B}' の SNR_{\max}^* は補正パラメータ値 $(\theta, C, f_0) = (\frac{97}{200}\pi, 2.016 \times 10^{-10}, 934.9080)$ のときに得られる。

データ R140B に対する $|c(f_0)|^2$ を横軸、データ R140A に対する $|c(f_0)|^2$ を縦軸として、周波数に関して対応するもの同士を点で表したものが図 6.11 である。赤丸は、周波数に関して解析 {R140A+R140B}' の SNR_{\max}^* に対応する点を囲んでいる。解析 {R140A+R140B}' に対して、図 6.10 の coincidence 条件の後の生き残っ

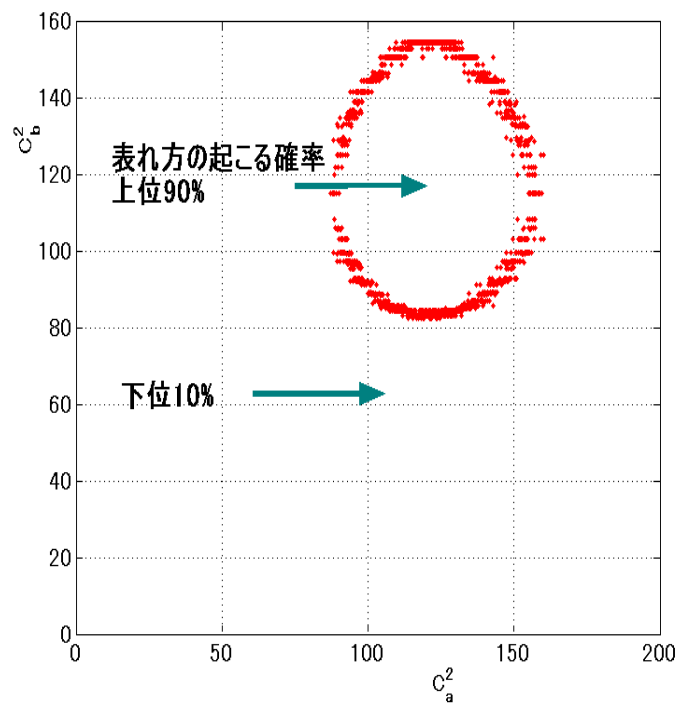


図 6.8: $p(c_A^2, c_B^2) = p_h$ を満たす $(c_A^2, c_B^2)_h$ である。横軸は c_A^2 。模擬信号を加えていないデータ R140A に対して得られる $|c(f_0)|^2$ の平均値で規格化している。縦軸は、 c_B^2 。模擬信号を加えていないデータ R140B に対して得られる $|c(f_0)|^2$ の平均値で規格化している。境界線内は確率 $p(c_A^2, c_B^2)$ の大きい方からの合計が、全合計の 90% の部分であり、この領域を重力波候補として残す。

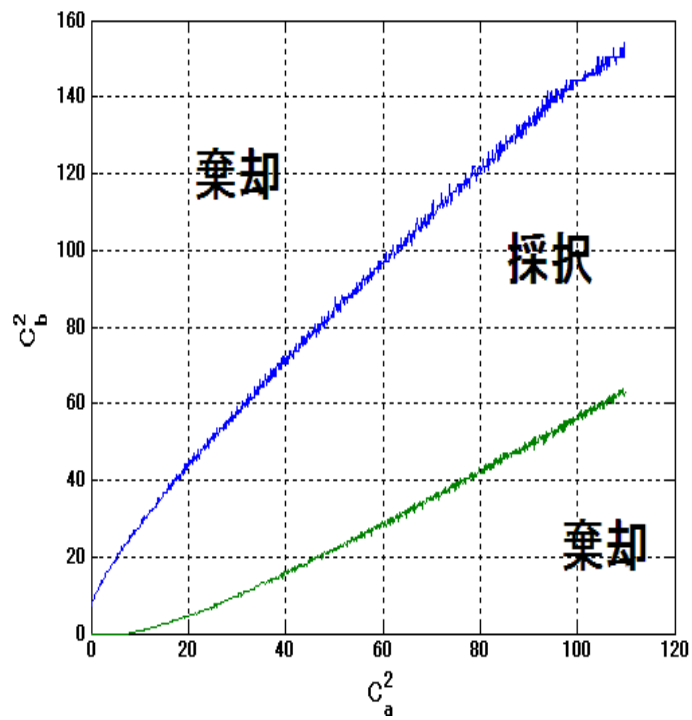


図 6.9: coincidence 条件について、採用領域と棄却領域の境界線である。横軸は c_a^2 。模擬信号を加えていないデータ R140A に対して得られる $|c(f_0)|^2$ の平均値で規格化している。縦軸は、 c_b^2 。模擬信号を加えていないデータ R140B に対して得られる $|c(f_0)|^2$ の平均値で規格化している。

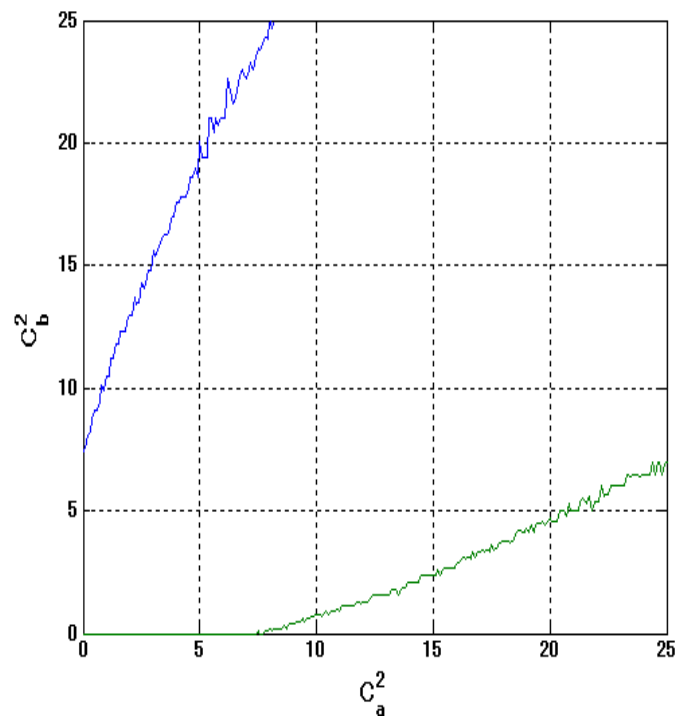


図 6.10: 図 6.9 を拡大したものである。実際のデータに対して coincidence 解析を行うときに使う部分である。

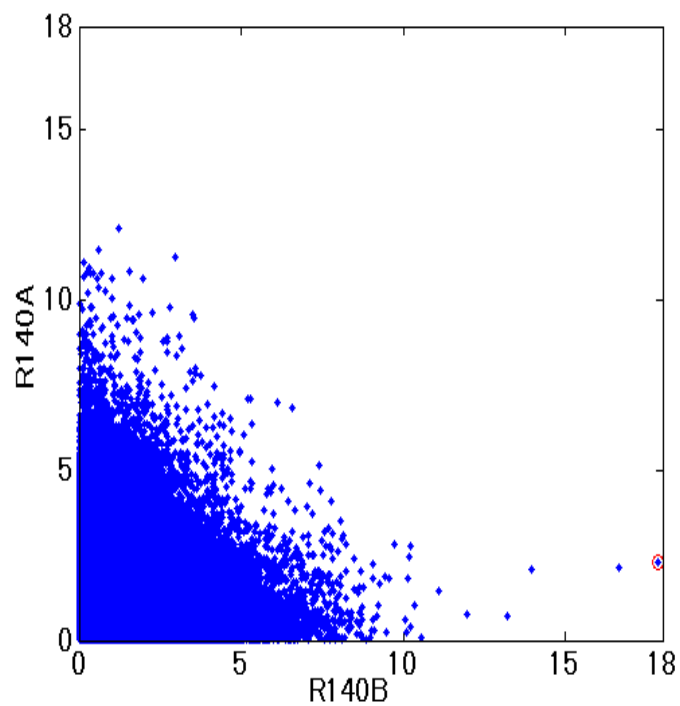


図 6.11: データ R140B に対する $|c(f_0)|^2$ を横軸、データ R140A に対する $|c(f_0)|^2$ を縦軸として、周波数に関して対応するもの同士を点で表した。横軸は、データ R140B に対して得られる $|c(f_0)|^2$ の平均値で規格化している。縦軸は、データ R140A に対して得られる $|c(f_0)|^2$ の平均値で規格化している。赤丸は、周波数に関して解析 $\{R140A+R140B\}$ の SNR_{\max}^* に対応する点を囲んでいる。

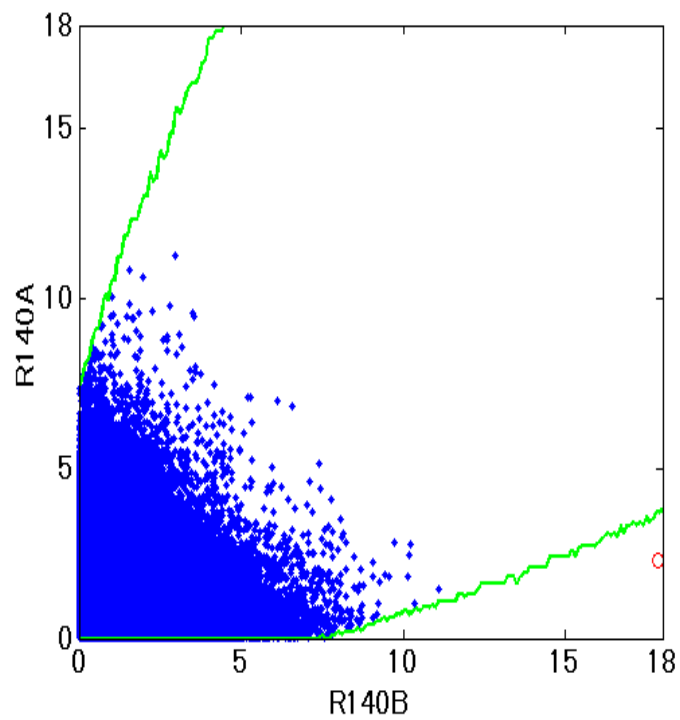


図 6.12: coincidence 条件の後の生き残った点。緑線は図 6.10 の coincidence 条件の境界線である。赤丸の位置にあった点は coincidence 解析により棄却されたことが分かる。この coincidence 解析の前後で図の点の個数 (周波数 bin の個数) は 209720 個から 209647 個に減少した

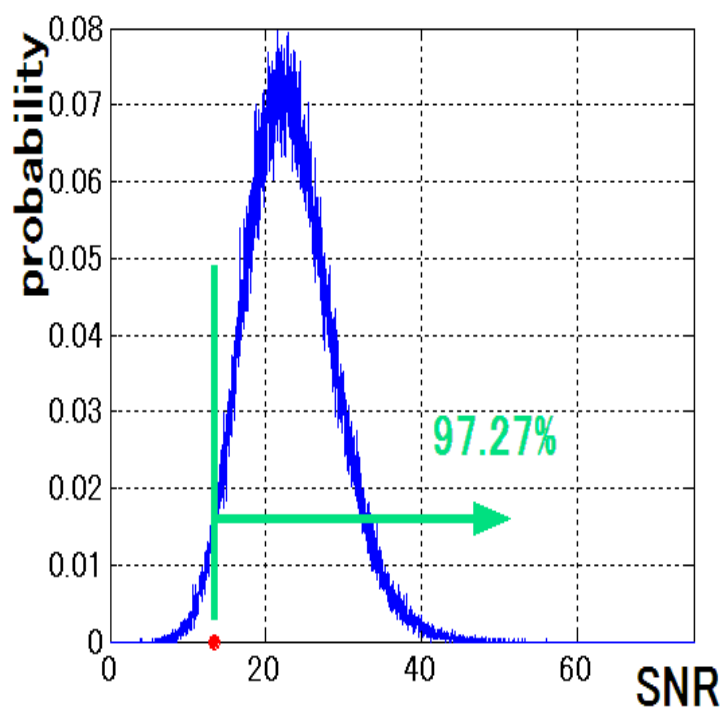


図 6.13: 解析 $\{R140A+R140B\}'_c$ の場合。 $h_r^{\text{inject}} = 3.896 \times 10^{-23}$ で模擬信号埋め込み simulation を行ったときの確率分布。 SNR_{max}^* と ∞ の間の $p(SNR_{\text{max}} | h_r^{\text{inject}})$ の合計は 0.9727 である。

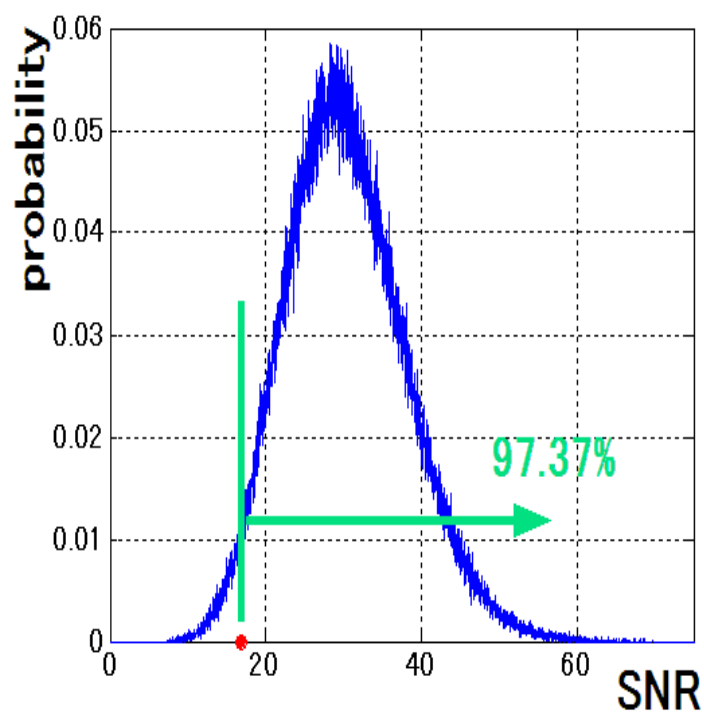


図 6.14: 解析 $\{R140A+R140B\}_c$ の場合。 $h_r^{\text{inject}} = 3.803 \times 10^{-23}$ で模擬信号埋め込み simulation を行ったときの確率分布。 SNR_{max}^* と ∞ の間の $p(SNR_{\text{max}} | h_r^{\text{inject}})$ の合計は 0.9737 である。

た点を同様に表したものが図 6.12 である。図 6.12 の赤丸は、図 6.11 の赤丸と同じ位置にある。しかし、赤丸の位置にあった点は coincidence 解析により棄却されたことが分かる。そのため、解析 $\{\text{R140A}+\text{R140B}\}'$ の SNR_{max}^* ($= 13.851$) の値と比較して、解析 $\{\text{R140A}+\text{R140B}\}'_c$ の SNR_{max}^* ($= 13.324$) の値は小さくなった。ゆえに、upper limit は下がりそうである。しかし、実際には相関条件に対する棄却率 2.3% を考慮する必要がある。したがって、全体での confidence level を 95% にするためには、模擬信号埋め込み simulation を行い確率分布 $p(SNR_{\text{max}}|h_r^{\text{inject}})$ を求めて、 $C(h_r^{\text{inject}}) = 97.3\%$ となる h_r を探す。これは、 $h_r^{\text{inject}} = 3.90 \times 10^{-23}$ のときである。SN ロス 9% 以下という条件を含めることにより、合計 strain ($h_r = \sqrt{h_+^2 + h_\times^2}$) に対する upper limit は 4.3×10^{-23} となる。結局、解析 $\{\text{R140A}+\text{R140B}\}'_c$ による upper limit は解析 $\{\text{R140A}+\text{R140B}\}'$ の場合に比べて大きくなった。解析 $\{\text{R140A}+\text{R140B}\}$ と解析 $\{\text{R140A}+\text{R140B}\}'_c$ を比較したときも同様である。

図 6.13 は、解析 $\{\text{R140A}+\text{R140B}\}'_c$ の場合に $h_r^{\text{inject}} = 3.896 \times 10^{-23}$ で模擬信号埋め込み simulation を行ったときの確率分布である。 SNR_{max}^* と ∞ の間の $p(SNR_{\text{max}}|h_r^{\text{inject}})$ の合計が 0.9727 になる。図 6.14 は、解析 $\{\text{R140A}+\text{R140B}\}'_c$ の場合に $h_r^{\text{inject}} = 3.803 \times 10^{-23}$ で模擬信号埋め込み simulation を行ったときの確率分布である。 SNR_{max}^* と ∞ の間の $p(SNR_{\text{max}}|h_r^{\text{inject}})$ の合計が 0.9737 になる。

6.4.3 今回の coincidence 解析が示唆すること

解析 $\{\text{R140A}+\text{R140B}\}$ と解析 $\{\text{R140A}+\text{R140B}\}'_c$ を比較したとき、解析 $\{\text{R140A}+\text{R140B}\}'$ と解析 $\{\text{R140A}+\text{R140B}\}'_c$ を比較したとき、共に upper limit は減少しなかった。これは、明らかに重力波らしくない信号が、upper limit を決めているわけではない、ということの意味する。 SNR_{max}^* は 1 つのデータだけから得られる値である。coincidence 解析を行ってもこの値が減少しないということは、 SNR_{max}^* は特異なノイズによって得られた値というわけではない。

第7章 まとめ

7.1 結果

ここで、データを足し合わせる2種類の方法を

- (i) 複数のデータに対して、位相差を考慮して周波数領域で足し合わせる方法。
- (ii) 複数のデータに対して、位相差を考慮せずに周波数領域で足し合わせる方法。

とおく。得られた結果を次にまとめる。

- 3つの未知パラメータに対して4つの補正を行うことによりSNロスを9%以下に抑えた。4つの補正の内の3つは、パルサー回転軸方向と重力波の伝播方向とのなす角度、重力波スピンドアウン、matched filtering を計算するときにドップラーシフト δt にかかる重力波周波数、それぞれの補正パラメータ (θ, C, f_0) 値である。残りの1つは、FFTにより区切られた f_0 の間隔をより細かく区切る補正值 Δf_m である。
- R140A、R140Bの2つのデータを2種類の方法(i)、(ii)で足し合わせて解析する場合の最適な補正パラメータ値の集合を求めた。その結果、開始時刻の時間差が小さいデータ同士を足し合わせるときには、方法(i)を使うべきであると分かった。R128、R140の2つのデータを2種類の方法(i)、(ii)で足し合わせて解析する場合の最適な補正パラメータ値の集合を求めた。その結果、開始時刻の時間差が大きいデータ同士を足し合わせるときには、方法(ii)を使うべきであるということが分かった。
- R140AとR140Bの2つのデータに対しての相関(coincidence)条件を求めた。
- 実際に、DT9内のR140A(5.5日)、R140B(5.5日)の2つのデータを2種類の方法(i)、(ii)で足し合わせて解析した。また、2種類の方法に対してそれぞれ相関解析を行って、合計4種類の解析をした。そのとき、SNロス9%以下という条件で最適な補正パラメータ値の集合を使った。
- 実際の干渉計データを使った雑音の確率分布に従ってupper limitを求めた。
- 合計 strain($h_r = \sqrt{h_+^2 + h_\times^2}$)に対するupper limitとして、 $h_{\text{upper limit}} = 4.0 \times 10^{-23}$ という値を得た。このとき、confidence levelは95%である。このupper limitは今まで行われた連続波解析の中で最も小さい値である。
- 今までSN1987Aに対して行われた解析の中で最も信頼性があり、かつ、最も効率が良い。理由を順に述べる。ドップラーシフトとしてNASAのデータを補完した値を新たに用いた。SNロスを抑えるために、補正值 Δf_m を新たに用いた。未知パラメータの内、パルサー回転軸方向と重力波の伝播方向とのなす角度 θ の範囲を狭めて、角度 ψ' を考慮しないようにした。補正パラメータ値の集合を最適化した。実際の干渉計データを使った雑音の確率分布に従ってupper limitを求めた。相関解析を行った。

- 相関解析を行ったときと、行わなかったときを比較した。その結果、明らかに重力波らしくない信号が、上限値を決めているわけではない、ということが分かった。

7.2 結論

本論文では、TAMA300 で得られたデータを用い、SN1987A 残骸にあると考えられているパルサーからの連続重力波を探索する手法と、その結果得られた上限値を示した。この上限値は SN1987A 残骸のパルサーに対するものとしてはこれまでで最もよいものである。本論文に示した解析方法は、より多くの干渉計からデータが得られた場合にもそのまま適用することができる。各 DT 内の Run のデータ同士については位相差を考慮して周波数領域で足し合わせ相関解析を行うのに対して、こうして得られた各 DT のデータについては解析を行った後、位相差を考慮せずに周波数領域で足し合わせ、相関解析を行う手法が有効である、ということが本論文では示された。今後、質の高い観測データが、様々な検出器で得られることが期待できる。それらのデータをこの手法で解析することで、SN1987A 残骸にあると考えられているパルサーから放出されている連続重力波の検出、もしくは、よりよい上限値を効率よく得ることが期待できる。

関連図書

- [1] John Middleditch, Jerome A. Kristian, William E. Kunkel, Kym M. Hill, Robert D. Watson, Richard Lucinio, James N. Imamura, Thomas Y. Steiman-Cameron, Andrew Shearer, Raymond Butler, Michael Redfern, Anthony C. Danks, 'Rapid photometry of supernova 1987A: a 2.14 ms pulsar?', *New Astronomy* **5** 243-283 (2000)
- [2] 副田憲志, 'TAMA300 データを用いた連続重力波解析', 東京大学修士論文 (2003)
- [3] T.M. Niebauer, A. Rudiger, R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler and K. Danzmann, 'Pulsar search using data compression with the Garching gravitational wave detector', *Phys.Rev.D* **47**, 3106 (1991)
- [4] B Allen and G Woan (for the LIGO Scientific Collaboration), 'Upper limits on the strength of periodic gravitational waves from PSR J1939+2134', *Classical and Quantum Gravity* **21** S671-S676 (2004)
- [5] T. Suzuki, 'Search for continuous gravitational wave from pulsars with resonant detector', *Gravitational Wave Experiments*, edited by E. Coccia, G. Pizzella and F. Ronga (World Scientific), 115 (1995)
- [6] <http://ssd.jpl.nasa.gov/cgi-bin/eph>
- [7] 国立天文台編, '理科年表 2003', 丸善 (2002)
- [8] S. Telada, 'Calibration and its error estimation method', *Gravitational Wave Detection II*, edited by S. Kawamura, N. Mio, 129-136 (1999)